

***Càlculus***

**Annex 7**

## **Escriure: història**



## Taula

La complexitat social .....	3
Els primers estats .....	4
Què ens ha portat ha escriure? .....	5
<i>Calculi i bullae</i> .....	7
Del <i>càculi</i> al càlcul .....	9
La numeració sumèria .....	11
La base és la <i>base</i> .....	13
Un exemple: la numeració jeroglífica egípcia .....	15
Base principal i base auxiliar .....	17
Reduïm la quantitat de signes.....	19
Un “producte” ben fet.....	21
Nombres cada vegada més grans: maies i hindús .....	23
Una clau per escriure nombres grans: eliminar alguns signes .....	26
Un problema nou .....	30
El primer zero: el babilònic.....	32
El zero com a nombre o com a indicador .....	35
Limitacions de les numeracions maia i babilònica .....	36
La solució final: les numeracions posicionals.....	37
La numeració índia .....	38
Tot resolt i encara més .....	40
El zero invisible.....	41
Un altre zero invisible: el xinès .....	44
De la Índia a Occident: el paper de l’Islam .....	45
L’evolució de l’escriptura de les xifres .....	49
La base deu no és el déu de les bases .....	52
Classifiquem les numeracions escrites .....	56
Numeracions figurades .....	59
El llenguatge de les mans .....	59
Nusos: els khipus.....	63
Resum.....	70
Apèndix A: Esquemes sobre sistemes de numeració .....	73
Apèndix B: Bases de numeració informàtiques.....	95
Els precedents del sistema binari .....	95
El sistema binari com a sistema numèric.....	97
Bits, bytes, ASCII, ISO, UNICODE.....	99
Els sistemes octal i hexadecimal .....	100
Tot digital, tot binari.....	101

## La complexitat social

En capítols anteriors hem esmentat que l'aparició del nombre va ser forçada per l'augment de complexitat social. També hem dit que les diferents societats, les diferents cultures, han desenvolupat uns sistemes per comptar suficients pel seu grau de complexitat social. Però quins factors indiquen el nivell de *complexitat social* d'una cultura determinada? Aquesta pregunta no té una resposta única. Cal triar uns indicadors; els arqueòlegs i els antropòlegs en fan servir de diferents tipus.

Els arqueòlegs<sup>1</sup> acostumen a observar indicadors com ara:

- el tractament funerari diferenciat
- la diferència en la qualitat i escala de l'arquitectura residencial
- l'aparició de bens sumptuosos
- l'existència de sistemes de comunicació simbòlica formalitzats
- l'aparició d'arquitectura pública

El quart d'aquests punts, relatiu als sistemes de comunicació, ens interessa especialment perquè inclou aspectes relatius a l'art però també, lògicament, als que es refereixen a l'escriptura, en general, i numèrica, en particular, que són els que ens interessin en aquest estudi.

Des de l'antropologia un dels més utilitzats, potser per la seva facilitat d'observar, adopta un punt de vista tecnològic i estudia l'ús de l'energia i la productivitat. Quan millor s'aprofita l'energia i més es produeix, més alt és el nivell de complexitat. Tot i tenir importància es fa evident que un indicador únic és insuficient.

Les teories sobre l'evolucionisme cultural proposades per Robert Carneiro al voltant dels anys 60-70 del segle anterior, fan noves propostes de mesura del nivell de complexitat social. Carneiro va confegir unes escales d'indicadors parcialment jerarquitzades, de manera que l'aparició d'un indicador de nivell superior determina en un grau elevat la probabilitat d'aparició d'un indicador de nivell inferior (Wright, R., 2005). Entre els indicadors de nivell elevat de Carneiro són molts els relatius a aspectes econòmics, com poden ser la propietat privada de la terra, l'emmagatzematge o la redistribució dels aliments, l'existència d'impostos o de mercats... també hi trobem relacionats amb els drets de les dones o el joc. Si bé l'existència d'algun sistema d'escriptura no hi apareix sí que trobem indicadors relatius a l'existència de "coneixements especialitzats que produeixen alguna mena de guany pel possessor d'aquest coneixement". Aquest és un indicador que eleva el nivell de complexitat. No cal dir que en les cultures antigues el domini del càlcul o de l'escriptura era una especialitat reservada a unes poques i elegides persones.

...des dels inicis de les eres considerades històriques (és a dir, aquelles de les quals es conserven documents o testimonis escrits), la possessió de destreses de lectura i escriptura van ser possibilitats reservades a uns pocs, afavorits per això amb una excel·lent posició social, i normalment vinculats als poders de torn. En efecte, els escriptors – sacerdots, funcionaris, escribes – lloaven els seus déus i governants (Sumèria, Pèrsia, Mesoamèrica), administraven els seus recursos (Mari, Nínive, Ugarit) o servien com instruments d'orde o de domini (Roma, Grècia, Babilònia).

Edgardo Civallero<sup>2</sup>

<sup>1</sup> VEGA-CENTENO, RAFAEL. (2005): *Ritual y arquitectura en un contexto de complejidad emergente: el caso de Cerro Lampay, Valle de Fortaleza*. Article que es pot llegir a <http://www.ual.es/personal/tescoriz/Cursos/seminario.html>

<sup>2</sup> Extret de la pàgina 1 de l'article de CIVALLERO, EDGARDO (2004): *Las voces sin voz. Oralidad y centros de conservación de la memoria*: [http://eprints.rclis.org/archive/00003102/02/Archivos\\_orales.pdf](http://eprints.rclis.org/archive/00003102/02/Archivos_orales.pdf)

Una altra forma de mirar l'augment de complexitat d'una societat determinada és la seva forma d'organització política. Per la mateixa època que Carneiro (Wright, R., 2005) Elman Service proposa una divisió en quatre tipus d'organització que, de fet, poden formar també una seqüència d'augment de complexitat: **banda – tribu – cabdillatge – estat**. Sobre els orígens de la formació de l'estat hi ha diverses teories que, de fet, aporten visions més complementàries que enfrontades. En elles s'apunten diferents idees que acabaran en la formació d'estats:

- les millores tecnològiques permeten augmentar la producció i l'existència d'excedents. Paral·lelament apareix un nou grup social no productor que controlarà l'accés a aquests excedents. Amb l'aparició de la propietat privada es genera una estratificació social que acaba convertint-se en una forma purament jerarquitzada.
- el creixement demogràfic localitzat obliga a buscar noves formes d'alimentar a la població. Una solució pot ser la conquesta dels excedents d'altres (la guerra); una altra la recerca de millores tecnològiques i noves formes d'administració. Davant del conflicte bèl·lic les poblacions més unides i millor organitzades seran les vencedores. Una altra solució pot ser la millora tecnològica, i una de les formes d'incrementar la producció agrícola és la millora dels regadius, la qual cosa exigeix l'existència de complicats sistemes hidràulics que demanen una forta organització tant per la seva construcció i manteniment, com per la seva gestió.

## Els primers estats

En el camp de l'arqueologia es destaquen sis civilitzacions antigues que es considera que s'han format de manera independent, sense "copiar-se" de les veïnes: Mesopotàmia, Egipte, Mesoamèrica, la zona Andina, la Xina i la Vall de l'Indo.



Però si es miren les èpoques més àlgides de cadascuna i la seva proximitat geogràfica es poden resumir a tres: la Xina, Orient Pròxim i el Nou Món (Wright, R., 2005). Es considera que a aquestes regions es van desenvolupar de forma independent les tecnologies de l'ús de l'energia, de l'agricultura i de la informació. Totes tres van desenvolupar formes d'organització d'estat en les que hi trobem certs patrons comuns: controls de població i fronteres, formes de legislar, imposar i contro-

lar l'exercici de la llei, i sistemes fiscals. La gestió dels excedents implica no només les qüestions d'emmagatzematge, administració i repartiment sinó també queden afectades altres com la normalització i normativització del comerç.

Com es pot veure l'estat és una forma complexa de gestionar la pròpia complexitat social.

## Què ens ha portat ha escriure?

El primers registres escrits coneguts ens aporten una informació parcial sobre els orígens de l'escriptura. Justament perquè són els primers que hem trobat però no necessàriament els més antics. A aquest problema inicial es sumen d'altres. Per exemple el del material que suporta l'escriptura. Els indicis més antics els tenim en materials perdurables; sobre pedra o argila, Però, per contra, són més difícils de datar que els que es suporten sobre materials amb base o components orgànics (paper, pells, pintura de ceràmiques...). Tot i aixó podem intentar fer una visió general sobre l'origen de l'escriptura observant els primers escrits trobats de cadascuna de les tres grups de civilitzacions esmentades anteriorment:

- **Orient Pròxim:** al temple de la ciutat sumèria<sup>3</sup> d'Uruk es van trobar unes taules d'argila que presenten relacions de cereals i caps de bestiar. Són del 4t mil·lenni a.n.e.
- **La Xina:** unes inscripcions endevinatòries en os sobre qüestions agrícoles. En un costat s'escriuen les preguntes i a l'altre els oracles. Són de la dinastia Shang<sup>4</sup> (2n mil·lenni a.n.e.)
- **Mesoamèrica:** fragments de pedra amb *glifos* de la cultura *olmeca*<sup>5</sup> parlen de l'ús d'un calendari de 260 dies. (sobre el 650 a.n.e)

Es pot veure que l'agricultura (de manera indirecta en el cas olmeca) apareix en els tres textos. Però en dos d'ells, a més, hi apareixen els nombres: a la tauleta sumèria i al *glif* olmeca.

Observem amb més atenció les restes més antigues: les sumèries. Es considera que més del 80% de les tauletes trobades es refereixen a les entrades i sortides del temple de productes com aliments, ramats o teixits. Un exemple pot ser aquesta tauleta procedent de Jemdet Nasr on cada columna es refereix a les mercaderies estipulades per a cada dia. Es tracta d'una escriptura pictogràfica, no fonètica, basada en dibuixos amb significat, que ajuden a representar els objectes, les idees, les accions...

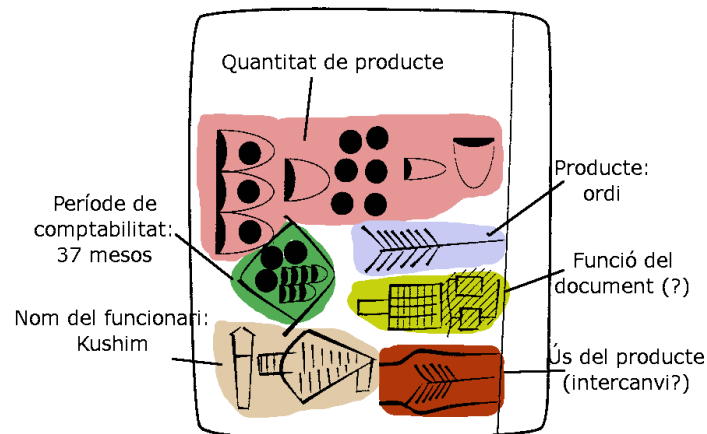


Un exemple d'interpretació d'una tauleta sumèria pot ser el següent:

<sup>3</sup> El Sumer és una regió històrica del sud de Mesopotàmia, entre els rius Èufrates i Tigris. La civilització sumèria acostuma a ser considerada la més antiga coneguda.

<sup>4</sup> La Shan és la 2a dinastia de la història de la Xina (a les valls del Riu Groc)

<sup>5</sup> La cultura *olmeca* és la més antiga de la zona de Mesoamèrica. Anterior a les *zapoteca*, *maia* i *asteca*.



Paleta de Narmer

Pel que veiem a les restes sumèries l'escriptura apareix com ajuda a la memòria, com a **sistema de registre**. És més tard que apareixeran altres usos més comunicatius i que tocaran aspectes com la religió, la relació de gestes dels governants o les legislacions. Per exemple, una de les mostres més antigues conegudes d'escriptura egípcia, un tros de pissarra coneguda com la paleta de Narmer trobada a Hierakòmpolis (Alt Egipte; 3000 a.n.e.), mostra és al faraó Narmer fent posar de genolls a un enemic. Pels egipcis l'escriptura era una invenció del déu Thot. La pròpia paraula *jeroglífic* en grec ve a significar *gravat sagrat*, però a l'Egipte antic li deien *medu necher*, que es pot traduir com *paraules divines*.

El procés d'adopció i adaptació d'un sistema de signes escrits és difícil de reconstruir. En bona mesura depèn de la quantitat i varietat de fonts documentals disponibles. Les motivacions per fixar una llengua per escrit, en canvi, són més clares. Tenim el cas del comerç i la comptabilitat entre els sumeris, del culte als déus i el desig de immortalitat entre els egipcis o també de la fixació de la literatura oral entre els grecs.

Bach i Berkel (1998:15)

En tot cas el que sí que trobem és que les formes més estables d'escriptura, les que més han perdurat i han estat font de transmissió a sistemes posteriors, estan lligades a l'aparició d'estats forts, per tant, a les seves formes i necessitats d'organització.

A l'assentar el saber en diferents tipus de suport material, els codis escrits van facilitar, en efecte, una gestió eficient del coneixement. Però, d'altra banda, van permetre controlar la informació: seleccionar-la, filtrar-la, deformar-la, vedar el seu accés i, en definitiva, utilitzar-la d'acord amb els desitjos i ideologies de les classes o sectors socials dominants. De fet, la major part de les teories arqueo-històriques relatives a l'origen de l'escriptura apunten cap a motius polítics, administratius o religiosos, relegant les raons socials, humanístiques o artístiques a un pla subjacent, gairebé ocult.

Edgardo Civallo<sup>6</sup> (2004:1)

<sup>6</sup> Extret de la pàgina 1 de l'article de CIVALLERO, EDGARDO (2004): *Las voces sin voz. Oralidad y centros de conservación de la memoria*: [http://eprints.rclis.org/archive/00003102/02/Archivos\\_orales.pdf](http://eprints.rclis.org/archive/00003102/02/Archivos_orales.pdf)

## ***Calculi i bullae***

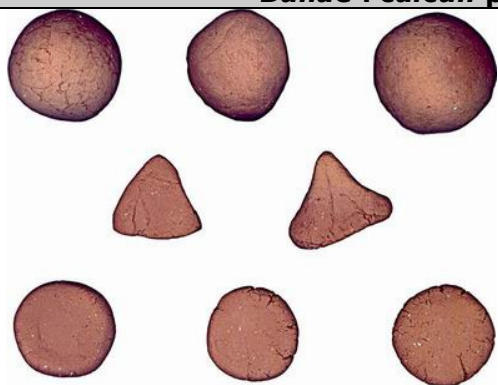
Hi ha altres exemples, també a Sumèria, de sistemes de *protoescriptura*. De fet moltes vegades s'expliquen com a origen de la pròpia escriptura.

A diferents jaciments arqueològics mesopotàmics s'han trobat fitxes d'argila gravades. En ocasions aquestes fitxes apareixien al costat de restes d'esferes d'argila trencades. Aquestes petites fitxes reben el nom de *calculi* i les esferes el de *bullae*. La paraula *càlculi* és el plural del mot llatí càlcul (còdol). S'han trobat també *bullae* senceres amb els *càlculi* al seu interior. Només a sis jaciments de l'antiga Mesopotàmia o pròxims (Uruk, Tel i Fara a l'Iraq; Susa, Shoga i Mish a l'Iran i Habuba i Kabira a Síria) s'han trobat més de 600 *càlculi*, més de la meitat amb alguna mena d'incisió. El sistema de *bullae* i *calculi* eren una mena de registres contractuals de transaccions fetes. El sistema era fàcil:

- es creaven els *càlculi* necessaris per representar els productes i les quantitats de cadascun d'ells. Les formes i les incisions dels *càlculi* podien variar i, de vegades, estaven foradats per poder-los enfil·lar amb alguna mena de cordill (potser en aquest cas no es guardaven a una *bulla*).
- es feia la *bulla* d'argila i es tancaven els *calculi* al seu interior. La *bulla* era segellada.

D'aquesta manera el contingut del tracte quedava tancat i guardat dins de la bola d'argila. Posteriorment es van fer els dibuixos dels *càlculi* a l'exterior de la *bulla*. Així es podia saber sense necessitat de trencar-la cada vegada quin era el tracte fet. El pas següent sembla obvi: es prescindeix dels *càlculi* i l'esfera s'aplana per formar tauletes d'argila on les inscripcions indiquen les quantitats i les mercaderies.



**Bullae i càculi procedents de Súmer**

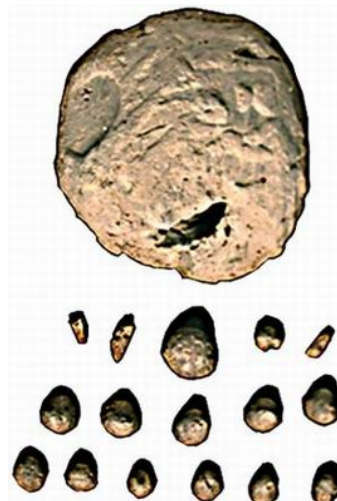
Fitxes sense perforar  
Sobre el 8000 al 3500 a.n.e.  
Amplades entre 1 i 1.9 cm



Fitxes perforades  
Sobre el 4000 al 3200 a.n.e.  
Llargada de la més gran 2,3 cm



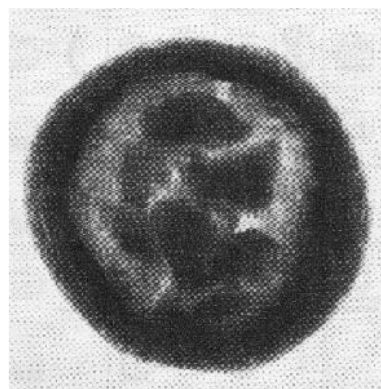
*Bulla* amb 11 fitxes  
3700 al 3200 a.n.e.  
Diàmetre de la bola 6,5 cm



*Bulla* amb 17 fitxes  
3700 al 3200 a.n.e.  
Diàmetre de la bola 7 cm



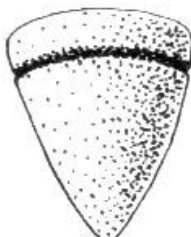
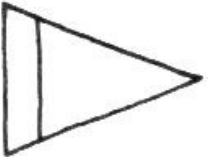


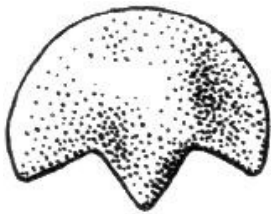

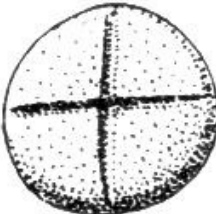
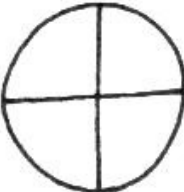
*Bulla* amb càculi enfilats  
3500 a 3200 a.n.e.  
Diàmetres 2,5 i 6,5 cm



Imatge en raigs X d'una *bulla*



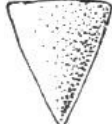



No es pot fer una teoria única sobre el significats de les fitxes. És molta la varietat de formes i incisions i molta, també, la dispersió dels jaciments on s'han trobat. Per exemple, les fitxes foradades podrien formar part, perfectament, d'un collar purament ornamental. Algunes teories, però, són més plausibles que d'altres. Especialment pels *càlculi* trobats en una mateixa zona. Una conjectura feta per D. Schmandt-Besserat i recollida no sense certa crítica a Ifrah (1997), defensa que són antecessors tridimensionals dels posteriors pictogrames bidimensionals. Així, per exemple, compara algunes de les fitxes amb els pictogrames corresponents i, en alguns casos, la coincidència, com a mínim tal com les presenta l'autor, sembla fora de dubtes:

<b>Càculi i pictogrames corresponents</b>			
 		 	
Pa		Oli	
 		 	
Vaca		Xai	

En tot cas, com a mínim, sí que representen alguna mena de simbolització: un dels passos necessaris per l'aparició de l'escriptura.<sup>7</sup>

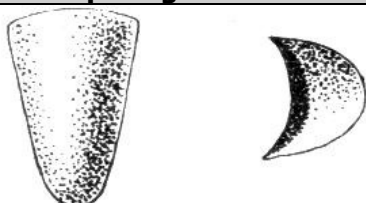
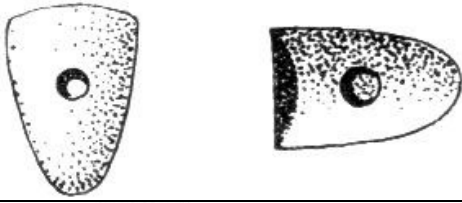
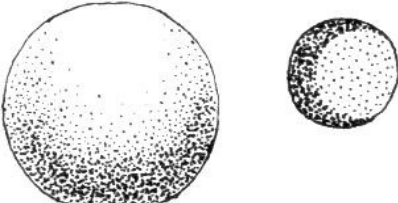
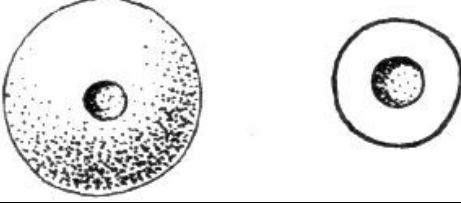
### Del *càculi* al càlcul

Hi ha ben documentats tot un conjunt de fitxes als que sembla que sí es pot donar un significat clar. Es tracta de conjunts de *càlculi* semblants trobats a les regions de Sumer i Elam<sup>8</sup> i molt relacionats amb les *bullae*, el que denota sens dubte el seu caràcter "comptable". Aquestes fitxes presenten les mateixes formes que els pictogrames numèrics identificats a les tauletes sumèries:

<b>Nombre</b>	<b>Forma de la fitxa</b>	<b>Fitxa i pictograma associat</b>
1	Con petit	 
10	Esfera petita	 

<sup>7</sup> Es pot llegir una versió completa de les idees de Schmandt-Besserat a :  
<http://www.pangea.org/~jbardina/padeesin.htm>

<sup>8</sup> Regió de l'altiplà persa veïna de l'antiga Mesopotàmia

Nombre	Forma de la fitxa	Fitxa i pictograma associat
60	Con gran	
600	Con gran foradat	
3600	Esfera gran	
36000	Esfera gran foradada	

Aquestes fitxes, prèvies a l'escriptura sobre tauletes, són tot un sistema complex de representació dels nombres que supera amb escreix les osques agrupades a ossos o altres talles de fusta que hem vist anteriorment. Amb aquests *càculi* es poden representar nombres superiors als dos centenars de milers (respectant les normes d'utilització que explicarem després). Però, a més, aquestes fitxes, essencialment manipulatives, són autèntics instruments de càlcul ja que operacions com les sumes o les restes són tan fàcils com ajuntar o eliminar fitxes. En determinats moments de les operacions caldrà només fer petites conversions, per exemple substituint una esfera per 10 cons petits per poder restar 3 de 20.

Restar 3 de 30		
Tenim 20	Canviem una esfera per 10 cons	Eliminem 3 cons. Queden 17
		

Els *càculi* són un dels primers sistemes de representació simbòlica de nombres que coneixem i si no ens posem la limitació de que l'escriptura ha de ser un sistema de representació bidimensional sobre superfícies més o menys planes (pedra, pergami,




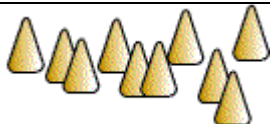

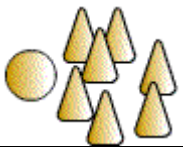


fusta, closques d'animals, papir, paper...) els podem considerar com la primera escriptura numèrica coneguda.

La simple repetició de marques en una talla no permet treballar amb quantitats massa grans. Societats fortament desenvolupades amb formes d'estat que exigeixen un alt nivell organitzatiu, necessiten registrar i manipular nombres molt grans. Què ens ha permès superar la iteració de senyals? La solució d'aquest problema ja la teníem amb el comptatge oral: l'agrupament, la introducció de paraules noves que identifiquin aquests grups i l'ús de les operacions aritmètiques. En el cas de la numeració escrita l'únic canvi que s'ha de fer és en el tipus de signes utilitzats. En la numeració oral el signe és la paraula, en la numeració escrita és un dibuix o, en el cas sumeri, una fitxa nova diferenciable de les anteriors per algun detall del seu aspecte exterior.

Observem com es construeix la sistemàtica de l'escriptura numèrica sumèria<sup>9</sup>, que aquí representarem amb fitxes en comptes de amb el seu sistema homòleg pictogràfic.

## La numeració sumèria

Per explicar com es construeix un sistema d'escriptura numèrica complet farem una il·lustració que intenti mostrar cada pas relacionant-lo amb algun dels aspectes que s'han tractat en capítols anteriors (*quadrar* i *comptar*). En cap cas els comentaris que es faran es corresponen amb el que devien pensar els antics sumeris quan van construir la seva numeració.




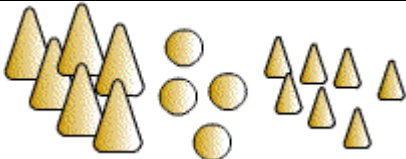
Representem la unitat amb una fitxa	<b>1</b>	
Si volem representar dues unitats d'un mateix tipus d'elements (cabres, pells, sacs...) convé representar-los amb un mateix tipus de símbol	<b>2</b>	
Podem anar addicionant fitxes a mesura que augment la quantitat d'elements. Així per exemple 8 elements el representarem reunint 8 fitxes.	<b>8</b>	
Quan arribem a 10 comencem a tenir molts elements. Coincideixen amb els dits de les dues mans. Més enllà serà difícil de saber de forma visual ràpida quants en tenim.	<b>(10)</b>	
Podem substituir aquestes 10 fitxes per una de diferent que representi aquesta quantitat. Si fins ara fèiem servir petits cons ara utilitzarem una petita bola que, visualment, es força diferent.	<b>10</b>	
Continuem afegint fitxes unitat. El 17 es pot representar només amb 8 fitxes.	<b>17</b>	
Quan "toca" posar la desena unitat nova (arribem a 20) traiem les 9 fitxes unitat que tenim i afegim una nova bola (10)	<b>20</b>	
Continuem amb aquest sistema. El 43 es pot representar amb 7 fitxes totals. Hem aconseguit eliminar moltes repeticions de símbols.	<b>43</b>	

<sup>9</sup> La gran majoria de numeracions, dades, exemples i, fins i tot idees, que es presentaran a partir d'ara s'han recollit dels llibres de Gheverghese (1996) i molt especialment d'Ibrah (1997). Per tant no s'inclouran les referències per facilitar la lectura del text.

Hem fet servir ja els tres principis bàsics:

- agrupament: cada 10 unitats.
- introducció de símbols nous per representar unitats i grups d'unitats: con (1) i esfera (10).
- ús d'operacions: sumes de les quantitats representades. El 43 es resol  $O O O O \Delta \Delta \Delta$  ( $10+10+10+10+1+1+1$ ).

Aquest procediment ens ha permès reduir la quantitat de símbols, però tornarà a fer-se incòmode amb nombres més grans. Cal estendre'l a nous agrupaments. Els sumeris van optar per no fer servir més de 5 boles (els dits d'una mà?) de la mateixa manera que havien decidit no reunir 10 cons. Calia fer un nou agrupament superior i, en conseqüència, incorporar un nou símbol. Per alguna raó fins ara desconeguda, van optar perquè el nou agrupament fos de 60 i el nou símbol un con gran, una unitat de grau superior.

Representem el 60 amb un con gran.	<b>60</b>	
Continuem addicionant fitxes per formar nombres més grans.	<b>66</b>	 $60+1+1+1+1+1+1$
	<b>85</b>	 $60+10+10+1+1+1+1+1$
	<b>287</b>	 $60+60+60+60+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1+1$

Comencem a haver-hi moltes fitxes. Si, per exemple, es posa una marca a la forma del con, el seu valor pot agrupar 10 dels altres. Una cosa semblant a la que hem fet amb l'esfera de 10. Un con amb un forat pot representar 10 cons de valor 60.







$$\begin{array}{c} \text{10 small cones} \end{array} = \begin{array}{c} \text{1 large cone with a hole} \end{array} = 600$$

Amb la incorporació del nou símbol, amb el principi additiu i la norma de no fer servir més de 9 *càculi* de valors 1 o 60 ni 5 de valors 10 o 600, el nombre més gran que podem fer és




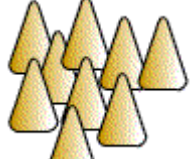


$$5 \cdot 600 + 9 \cdot 60 + 50 + 9 = 180\,599$$

Els sumeris, però, encara van pujar un graó més afegint dos símbols nous: l'esfera gran i l'esfera gran foradada. Especialment interessant és l'esfera gran perquè fa aparèixer de forma evident la potència. La nova esfera, com abans, representarà 10 unitats del mateix nivell.

Observem el següent esquema:

Valor	Operació	Símbol	Valor	Operació	Símbol
1	$60^0$		10	$1 \cdot 10$	
60	$60^1$		600	$60 \cdot 10$	
3 600	$60^2$		36 000	$3600 \cdot 10$	

Apliquem les normes de nou, incorporant aquestes noves fitxes, i observem quin és el nombre més gran que es podria fer:

					
5 · 36000 <b>180 000</b>	9 · 3600 <b>32 400</b>	5 · 600 <b>3 000</b>	9 · 60 <b>540</b>	5 · 10 <b>50</b>	<b>9</b>
$180\,000 + 32\,400 + 3\,000 + 540 + 50 + 9 = \mathbf{215.999}$					

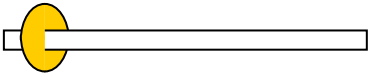
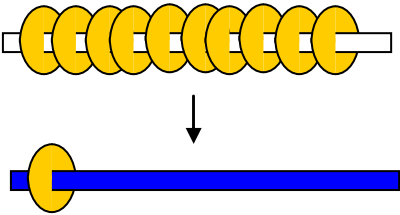
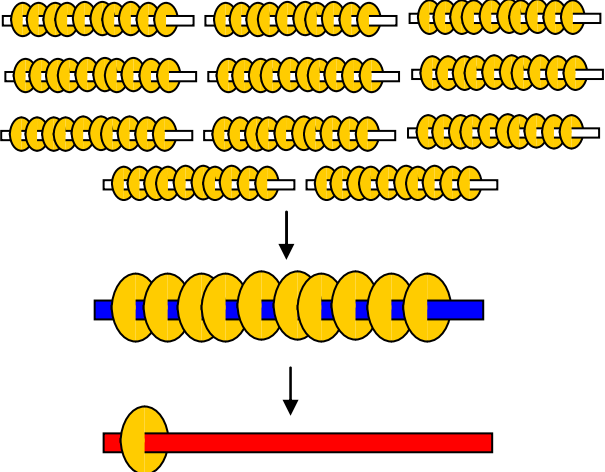
La numeració, com podem veure, és essencialment additiva, però en l'assignació de valors a les fitxes, en la decisió de com fer els agrupaments, intervenen la multiplicació i la potència.

## La base és la base

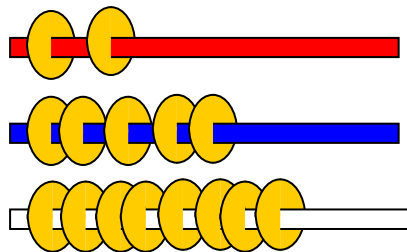
En algunes regions de l'Àfrica occidental, encara no fa gaire, els pastors tenien un costum molt pràctic per a calcular un ramat. Feien desfilar als animals un darrere de l'altre. Quan passava el primer, enfilaven una petxina en una tira blanca, i una altra quan passava el segon i així successivament. A l'arribar al desè animal desfeien el collar i enfilaven una petxina en una tira blava que associaven a les desenes. Després, enfilaven de nou petxines en la tira de cuiro blanca fins a arribar al vintè animal, i llavors enfilaven una petxina en la tira blava. Quan hi havia ja deu petxines és que havien passat cent animals; llavors desfeien el collar de les desenes i enfilaven una petxina en una tira vermella reservada per a les centenenes. I així successivament fins que s'acabava el recompte dels animals. A l'arribar als dos-cents cinquanta-vuit animals, per exemple, hi hauria vuit petxines en la tira blanca, cinc en la tira blava i dos en la tira vermella.

Georges Ifrah (1988:54)

En aquesta manera de comptar s'il·lustra perfectament el concepte primer del que anomenem **base d'una numeració**. Es decideix un nombre clau per agrupar, en aquest cas 10, i al voltant d'aquest nombre es fabrica una mena d'escala amb diferents graus d'ordre.

	<b>unitat</b>	Unitat de primer ordre
	<b>desena</b> (10 unitats)	Unitat de segon ordre
	<b>centena</b> (10 desenes) (10 · 10 = 100 unitats)	Unitat de tercer ordre

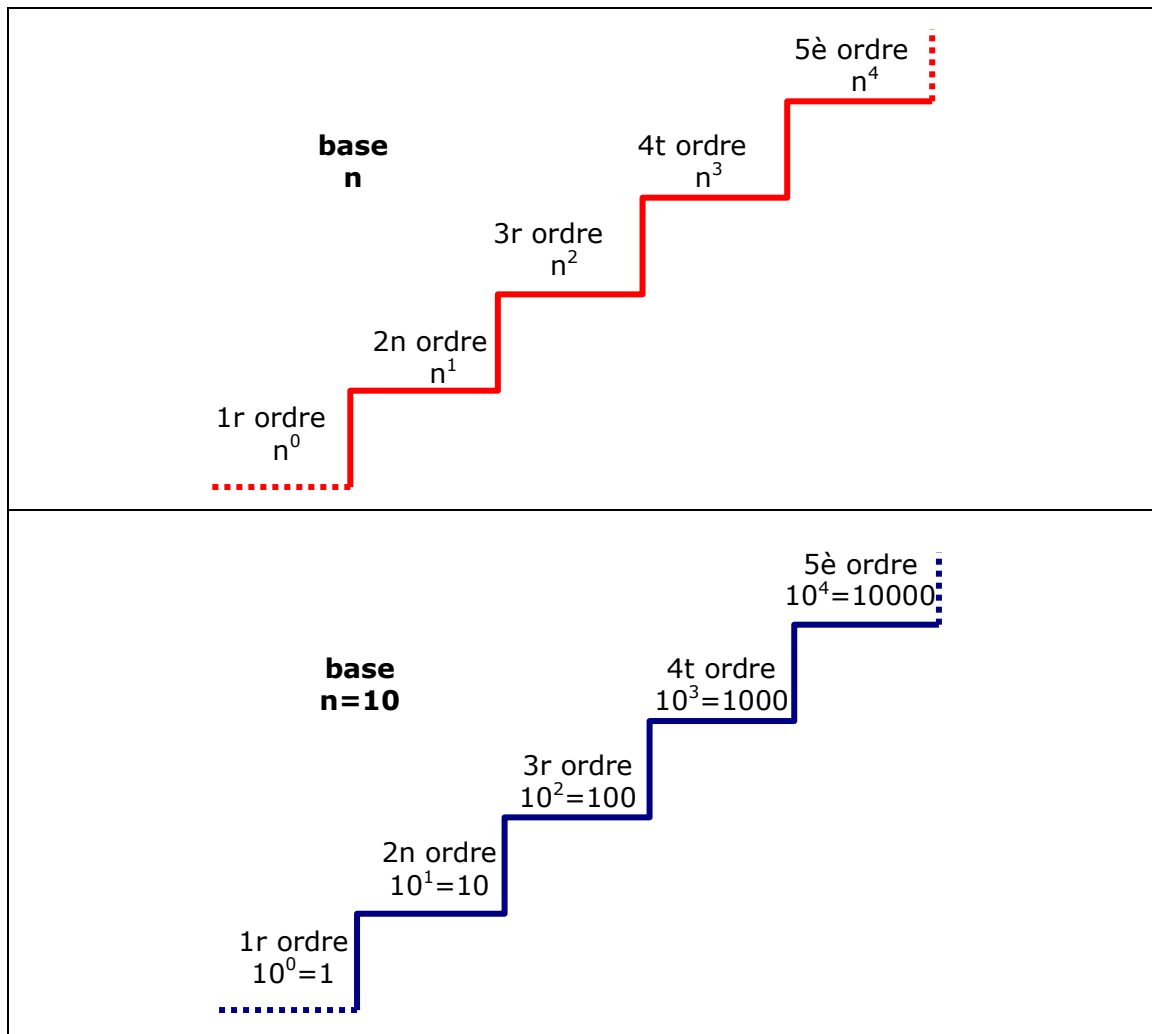
Una sola petxina pot representar un centenar d'animals. Amb tres cintes de colors i quinze petxines es poden representar els 258 animals de l'exemple.



S'ha fet servir un sistema d'agrupaments escalats de 10 en 10. Cada unitat d'un grau superior representa 10 de l'immediatament inferior. Aquest sistema, mentre tinguem tires amb colors suficients i petxines per omplir-les, ens permet anar molt lluny en la representació numèrica, ja que afegir una petxina a una nova cinta (deu centenars) representarà un miler d'animals, una a una altra cinta (deu milers) seran 10 000 animals amb un sol símbol. Només ens cal saber interpretar el codi de colors.

Observem com funcionen els diferents ordres d'una base en aquest esquema:





### Un exemple: la numeració jeroglífica egípcia

Un dels registres més antics de la numeració egípcia és el de la Maça de Narmer. Abans hem parlat de la Paleta de Narmer com un dels primers vestigis d'escriptura jeroglífica. La maça seria de la mateixa època: poc abans del 3000 a.n.e. Algunes teories proposen que commemora la conquesta del Baix Egipte. En aquesta maça hi trobem gravats una vaca, una cabra i una persona asseguda. A sota de cada dibuix hi ha uns altres que representen quantitats numèriques.



S'ha interpretat com "400.000 caps de bestiar" (la vaca); "1,422.000 animals petits" (la cabra) i "120.000 homes adults" (l'home). Aquest "homes" no sabem si és una mena de cens o són presoners fets.

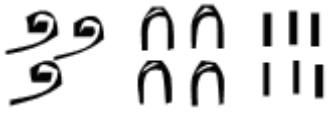
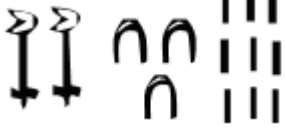
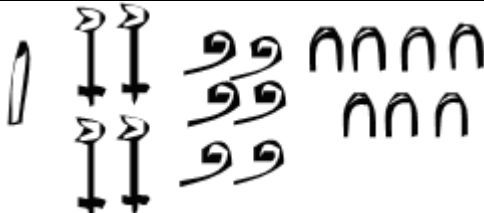



A partir de documents com aquest i moltes altres inscripcions en pedra hem conegut perfectament com era la numeració de l'antic Egipte

La base de la numeració egípcia jeroglífica, com al cas explicat abans de les petxines, era 10. Només calien 6 signes bàsics que representaven cadascuna de les potències de la base. Cap signe es podia repetir més de 9 vegades. Aquesta norma és conseqüència lògica de l'aplicació de la base. Reunir 10 símbols d'un ordre permet canviar-los per un de l'ordre superior. Els símbols eren els següents

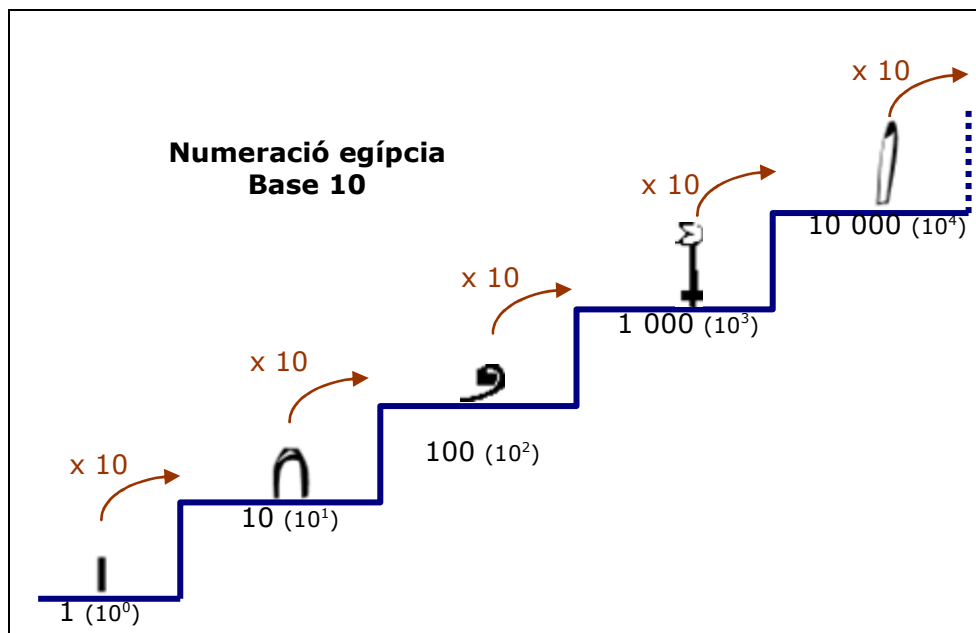
1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
⋮	∩	↯	⋈	𐌢	𐌥	𐌪
$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$

Per escriure un nombre qualsevol l'únic que s'ha de fer és acumular-ne tants de cada tipus com calgui.

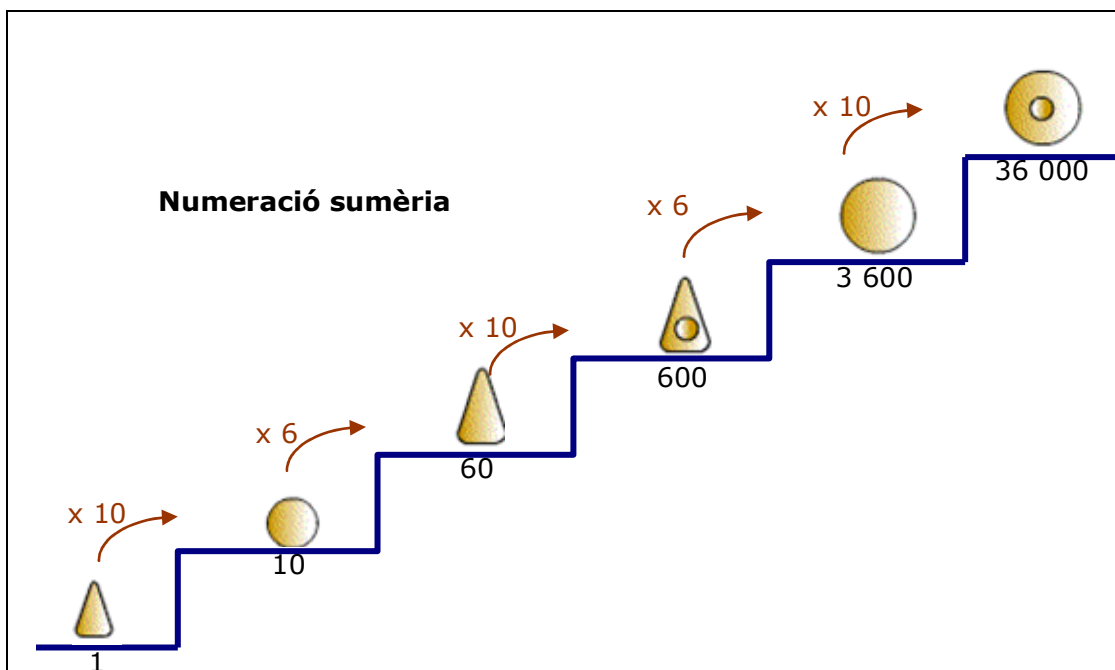
346	2 039	14 670
		
<b>1 333 330</b>		
		

## Base principal i base auxiliar

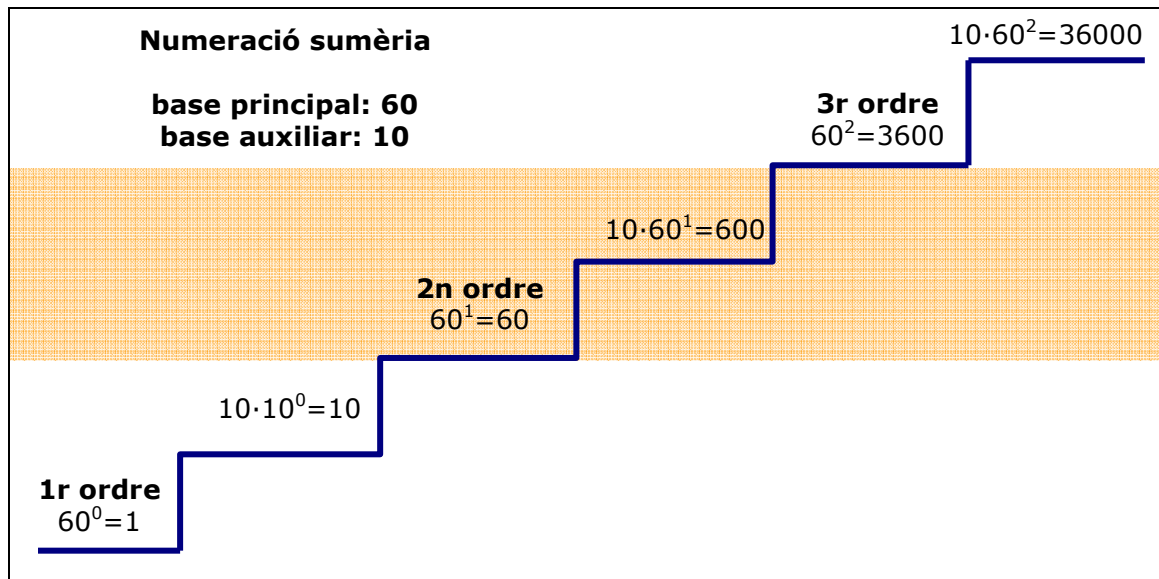
En el sistema de registre del comptatge amb petxines i en la numeració egípcia el salt de graó a graó, d'una unitat d'un ordre determinat a la unitat d'ordre següent, es produïa multiplicant sempre pel mateix nombre. Hem vist que la base la determina justament aquest nombre i que els salts, donat que la base no varia, els podem representar en forma de potència. Observem el que hem explicat amb la numeració egípcia:



Si observem el cas de la numeració sumèria observem una anomalia: hi ha dos salts diferents de graó, unes vegades es multiplica per 10 i altres per 6. Quina serà la base? Es pot dir que hi ha una base única?



Podem veure que cada dos graons es produeix la seqüència  $10 \cdot 6$ , és a dir, per pujar dos graons seguits des de l'inici podem fer salts multiplicant sempre per 60. Aquesta serà doncs la **base principal** ( $60^0=1$ ,  $60^1=60$ ,  $60^2=3600$ ). El 10 és una **base auxiliar** que ajuda a no repetir tants símbols.








Són moltes les numeracions en que trobem l'ús de bases auxiliars. Per exemple a la numeració **grega àtica o acrofònica** que es va fer servir a l'antiga Grècia entre el 500 i el 300 a.n.e. Els símbols bàsics d'aquesta numeració són els següents:

1	10	100	1000	10 000
I	Δ	H	X	M
<i>Iota</i>	<i>Deka</i>	<i>Hekaton</i>	<i>Khilioi</i>	<i>Myrioi</i>
$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$



Comparem com s'escriuria un mateix nombre amb numeració egípcia i una d'àtica (avancem que mal escrita)

Numeració egípcia	Numeració àtica
38 956	

Es fa servir un total de 31 símbols. Recordem, a més, que la capacitat òptima dels humans de comptar a ull, sense agrupaments, no va més enllà dels cinc elements. Els egipcis distribuïen els símbols de forma que fossin fàcilment comptables, però els grecs els arrengraven un darrera de l'altre. La lectura es torna difícil. Però es va trobar una solució a aquest problema amb la introducció d'un símbol comodí que representava el 5. Si després dins del 5 es dibuixava un altre símbol s'entenia que hi havia cinc d'aquell ordre.

5	50	500	5000	50 000
 Pente				
$5 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^1$	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$

Hem introduït una ajuda que ens deixarà reduir sensiblement la quantitat de símbols.

Sense pente	Amb pente
	
38 956	

El nombre encara té molts signes i no és del tot fàcil de llegir. Però amb la introducció d'aquests nou símbol, que agrupa cinc de cada ordre, hem reduït els 31 signes egipcis a només 15.

Amb aquest exemple es veu quina és la funció que fa una **base auxiliar** en un sistema de numeració escrita: reduir la quantitat de signes. En el cas de la numeració sumèria, amb una base principal de 60, seria gairebé impossible traduir ràpidament un nombre ja que el salt per cada grau d'ordre és massa gran.

## Reduïm la quantitat de signes

L'ús d'una base auxiliar no és l'única solució per reduir la quantitat de signes. Hi ha un altre que encara els redueix més dràsticament: l'ús de símbols especials per cadascuna de les unitats d'un ordre. És a dir:

- un símbol específic per cada unitat de l'1 al 9
- un símbol específic per cada unitat del 10 al 90
- un símbol específic per cada unitat del 100 al 900
- etc

Aquesta solució ja es va utilitzar en les numeracions egípcies *hieràtica* (sobre el 2500 a.n.e) i *demòtica* (750 a.n.e.). Més tard a altres llocs es van utilitzar les pròpies lletres de l'alfabet per representar cada nombre. La numeració grega jònica (segle IV a.n.e.), l'hebrea (segle II a.n.e.), l'armènia (segle IV n.e.), l'antiga numeració àrabica (750 n.e.)... Observem el cas de la numeració grega:

Unitats		Desenes		Centenes	
1	A	10	I	100	P
2	B	20	K	200	Σ
3	Γ	30	Λ	300	T
4	Δ	40	M	400	Υ
5	E	50	N	500	Φ
6	Ζ	60	Ξ	600	X
7	Z	70	O	700	Ψ
8	H	80	Π	800	Ω
9	Θ	90	ς	900	Ϟ




Ja que l'alfabet grec només constava de 25 lletres es van haver d'afegir dos símbols especials (pel 6 i pel 900). Els nombres es representen representant els símbols convenients.

83	555	709
Π Γ	E N Φ	Ψ Θ
80+3	500+50+5	700+9

Amb aquest sistema només s'arriba al 999. Per escriure nombres superiors es van aplicar diferents solucions reutilitzant els mateixos símbols. Una d'elles va consistir en afegir una coma (a dalt o a sota) del signe d'unitat. Aquesta coma multiplicava per mil el nombre corresponent. Per multiplicar per 10 000 es feia servir una M majúscula (símbol de *miríade*, deu mil) i a sobre s'escribia el nombre a multiplicar.

4 192	88 888	430 070
‘ΔΡςΒ	<sup>H</sup> M' HΩΠH	<sup>MΓ</sup> M ο
4·1000+100+90+2	8·10000+8·1000+800+80+8	43·10000+70

Observem com repercuteix aquest sistema en la reducció de signes comparant-lo amb els egipcis i àtic.

Numeració egípcia	Numeració àtica	Numeració jònica
		
38 956		

La reducció és dràstica. Hem passat dels 31 signes egipcis als 7 grecs. Però, quin és el preu? La disminució té un cost: la quantitat de símbols a aprendre. Els egipcis només memoritzaven 7 signes, els grecs 27. A més veiem que la lectura és dificultosa. Sembla que el que guanyem en *brevetat* ho perdem en *claredat*.

No hi haurà un altre tipus de solució que eviti la repetició exhaustiva de signes i, a la vegada, no compliqui la lectura del nombre?



## Un “producte” ben fet

La numeració egípcia fa un ús exclusiu de la suma per escriure els nombres. La sumèria i la grega acrofònica introdueixen una base auxiliar que agrupa certes quantitats de símbols d'un ordre abans de fer el salt a l'ordre següent. Els sumeris agrupaven de 10 en 10. El grecs, amb el signe *pente*, multiplicaven per cinc el símbol al que l'unien. Més tard, les numeracions alfabètiques tornen a ser purament additives en nombre inferiors a mil i, a partir d'aquí es comencen utilitzar multiplicacions per mil o deu mil. També la numeració romana aplica un ús similar del producte quan sobreratlla els nombres.

$$\overline{\text{DXIV}} = 514 \cdot 1000 = 514000$$

Però ja a la numeració assírio-babilònia (2350 a.n.e.) trobem l'esbós un ús més eficient de la multiplicació. Uns mil anys més tard, cap el 1450 a.n.e, a la Xina es feia servir una numeració, que anomenaren **xinesa tradicional**, que suposava un canvi radical en la manera d'afrontar l'escriptura numèrica<sup>10</sup>.

La primera diferència important és la forma d'escriure els nombres de l'1 al 10. L'u egipci, l'acrofònic o el romà tenen una forma simple: un “palet” (I) que pot recordar perfectament les osques de les talles numèriques primigènies. El dos es representarà II i el tres III. Els romans no van voler acumular més palets i ens van dir que el quatre era “un abans del cinc” (IV). Però egipcis i grecs van seguir afegint marques: IIII. De fet als rellotges amb *números romans* el quatre també es representa amb quatre palets perquè no hi hagi confusions visuals amb el 6 (VI) si es veu l'esfera girada. A l'arribar al cinc trobem marques noves (no en el cas dels egipcis que continuen acumulant palets), però el 6, el 7... són 5+1, 5+2... i els palets tornen a jugar el seu paper. No existeix una diferenciació entre els signes que representen les primeres unitats. Amb un signe o dos els fem tots. Oralment no passa això. Cada numeral entre *u* i *deu* és diferent. A la numeració grega alfabètica sí que cada nombre té un signe diferent, però això s'estén per cadascuna de les desenes i per cadascuna de les centenes. En canvi a la numeració xinesa clàssica trobem que cada nombre d'1 a 10 té el seu signe específic (com a mínim des del 4) i veurem com, amb aquests deu signes seran capaços de construir els nombres fins a 99.

1	一	6	六
2	二	7	七
3	三	8	八
4	四	9	九
5	五	10	十

<sup>10</sup> A la Xina, en determinades èpoques van coexistir quatre tipus de numeracions: la estàndard que es presenta aquí, “l'oficial”, la “comercial” i la de varetes. L'*oficial* és una versió més decorada de l'estàndard i la *comercial* una de més simplificada. La de varetes, utilitzada bàsicament com a instrument de càlcul, es presentarà més endavant.

La numeració escrita xinesa té una relació més que directa amb la numeració oral. Això es pot veure molt clarament amb uns pocs exemples

2	10	7	27
yi	sap	chat	yi sap chat (dos deu set)
二	十	七	二十七
5	10	8	58
ng	sap	baat	ng sap baat (cinc deu vuit)
五	十	八	五十八

Els signes corresponents a 2, 3,... 8 o 9 davant del deu multipliquen les desenes. Darrera es sumen. Mirem el cas de 13, el 30 i el 33. (Escriurem a partir d'ara els nombres horitzontalment)

Suma	十三	$10+3$	<b>13</b>
Producte	三十	$3 \cdot 10$	<b>30</b>
Combinació de producte i suma	三十三	$3 \cdot 10 + 3$	<b>33</b>

Quan en els nostres numerals orals diem "cent tres" o "tres-cents" passa una cosa semblant: al primer cas sumem ( $100+3$ ) i al segon multipliquem ( $3 \cdot 100$ ). A la nostra llengua aquesta distinció només es fa a partir de la centena. Potser el fet de que entre els numerals de les desenes tinguin noms especials ha dificultat l'elaboració d'un sistema més simple d'escriptura numèrica com el xinès.

Per escriure nombres a partir de 100 s'han de designar nous signes per les potències superiors a 10. En la numeració tradicional només s'afegien quatre: un pel cent, un altre pel mil, un pel deu mil i un quart pels cent milions. Les potències intermèdies es feien combinant aquests símbols.

$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$
<b>10</b>	<b>100</b>	<b>1 000</b>	<b>10 000</b>	<b>100 000</b>	<b>1 000 000</b>	<b>10 000 000</b>	<b>100 000 000</b>
十	百	千	萬	十萬	百萬	千萬	億
				$10 \cdot 10000$	$100 \cdot 10000$	$1000 \cdot 10000$	

Observem com queda amb la nova numeració el nombre de comparació que hem fet servir fins ara.

Numeració egípcia	Numeració àtica
	
Numeració jònica	Numeració xinesa tradicional
	三萬八千九百五十六
38 956	

Hem incrementat en dos la quantitat de signes escrits respecte a la *grega alfabètica* però el sistema és força més clar i coherent. Ara, a més, l'esforç memorístic és molt inferior: de 28 signes a memoritzar passem a 14, encara que amb només una dotzena ja podem escriure els nombres entre 1 i 9999.

## Nombres cada vegada més grans: maies i hindús

Segons Ifrah amb la numeració *xinesa clàssica o tradicional* (i sense el catorzè signe corresponent a  $10^8$ ) podien arribar a escriure nombres increïblement grans. Pràcticament fins als mil bilions, una quantitat que en pocs casos de la vida quotidiana farien servir. La seva numeració sembla suficient. Poques cultures han tingut necessitat de treballar amb nombres tan grans. Les cultures mesoamericana i índia sí.

### • Mesomèrica

A la cultura mesoamericana els nombres grans es feien servir usualment en l'economia i l'astronomia. Mirem primer l'economia.

La moneda que feien servir els maies i els asteques era l'ametlla de cacau. La unitat bàsica eren 20 llavors, la següent era el *tzontle* (400 ametlles – 20 unitats). La següent el *xiquipilli* (8 000 ametlles – 20 *tzontles*). Observem clarament una base 20 en el sistema monetari.

Com a unitat monetària tenia un valor no massa alt. Al segle XVI un conill valia 4 ametlles i el ral de plata espanyol es bescanviava per 200 ametlles. Això feia que en determinades situacions es treballessin amb nombres prou grans. Sabem que els indis de Tobago pagaven als asteques un tribut de 400000 *tzontles* que equivalen a 160 milions d'ametlles de cacau.



Baia de cacau amb ametlles  
(poden haver-hi entre 20 i 60)

Però els nombres més grans es feien servir en relació als calendaris i l'astronomia. Els maies disposaven de dos calendaris: el *tzolkin* de 260 dies (20 mesos de 13 dies) de caràcter ritual, per a la religió i les festes familiars, i el calendari *haab* de

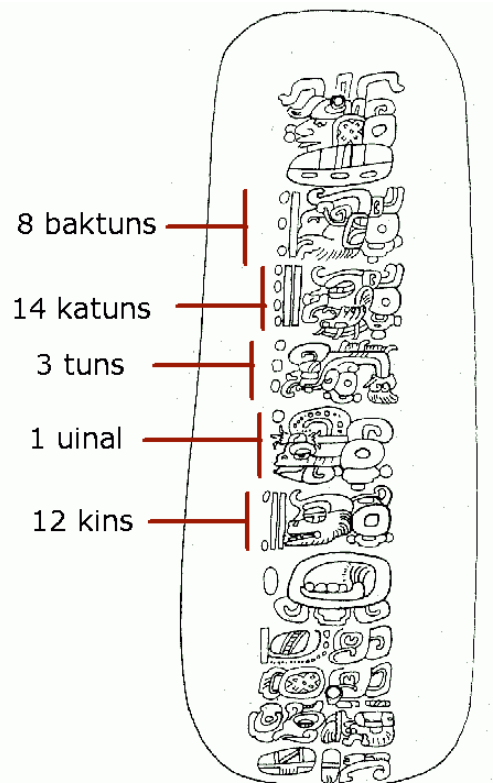
365 dies (18 mesos de 20 dies i 5 dies afegits) més imbricat amb el cicle solar, les estacions i, per tant, amb l'agricultura.



Podem observar que el mínim comú múltiple dels dies de cada any és 19890 dies, 52 anys solars o 73 rituals. Aquest cicle es coneix com a *Roda calendàrica*. Els antics maies, a més, seguien el cicle de Venus de 584 dies. El *mcm* dels tres anys és ara 37960 dies: 104 anys solars, dues *rodes calendàriques*. Tots aquests cicles eren motius de grans celebracions.



Però els maies encara tenien un altre forma de mesurar el temps que obligava a l'ús de nombres encara més grans: el que es coneix com a *compte llarg* i que servia per determinar les dates importants. Els maies comptaven a partir d'una data que van prendre com a inicial. Aquesta data es correspon amb mitjans d'agost del 3114 a.n.e del nostre calendari. Les datacions es podien fer en unitats de temps com els "dies", els "mesos", "anys", "cicles d 20 anys"... Però moltes vegades, a més, s'escrivia també la quantitat de dies corresponents. A l'estela de la placa Leyden trobem la data escrita més antiga que coneixem fins ara:

- 8 baktuns,
- 14 katuns,
- 3 tuns
- 1 uinal
- 12 kins.



Observem els noms i representacions de cada període de temps que es fan servir:

Ordre	Nom	Glif (una de les variants)	Equivalència	Dies
1r	<i>kin</i> dia			1
2n	<i>uinal</i> mes de 20 dies		20 kins	20
3r	<i>tun</i> any de 18 mesos		18 uinals	360

Ordre	Nom	Glif (una de les variants)	Equivalència	Dies
4t	<i>katún</i> cicle de 20 anys		20 tuns	7.200
5è	<i>baktún</i> cicle de 400 anys		20 katuns	144.000

Si traduïm a dies la data de la Placa Leyden, tal com calcularem més tard, trobem que parla de  $1_1253.912$  dies. Com es veu la base per canviar d'ordre és 20 amb una anomalia en el 3r ordre per permetre comptar el calendari amb anys solars sense distorsions. Aquesta anomalia del sistema numèric no es va mantenir sempre en tots els àmbits d'ús numèric, però en tot cas sempre existeix en els nombres dels calendaris.



Però els maies tenen esteles que van més enllà d'aquest còmput temporal. És el cas de l'estela F de Quiriguà que presenta una data molt més enllà dels *baktún*. Concretament parla de 5 *alautun*. Amb reconstrucció d'unitats de temps superiors extretes d'altres documents (com el famós còdex de Dresde), ara sabem que 5 *alautun* són uns 320 milions d'anys. El sorprenent és que estan calculats els dies tant en el calendari sagrat com en el solar (Taton, 1988).

Aquests documents han permès estendre les mesures temporals dels maies a partir del *baktun*.

Estela F de Quiriguà

Ordre	Nom	Equivalència	Dies
6è	<i>pictun</i> cicle de 8000 anys	20 baktuns	$2_1880.000$
7è	<i>calabatun</i> cicle de 160 000 anys	20 pictuns	$57_1600.000$
8è	<i>kinchiltun</i> cicle de 3 200 000 anys	20 calabatuns	$1.152_1000.000$
9è	<i>alautun</i> cicle de 64 000 000 anys	20 kinchiltuns	$23.040_1000.000$

Què va portar als maies a fer uns càlculs temporals tan llargs i per què continuava sent un misteri.

### • La Índia

A un dels quatre textos sagrats escrits en sànscrit, concretament al *Yajur Veda*, es donen noms especials a les potències de 10 fins a  $10^{12}$ . Nosaltres només tenim noms especials per quatre potències de 10 (deu, cent, mil, milió).. Al *Ramayama*, un altre text hindú d'aproximadament la mateixa època, es parla de dos exercits enfrontats: un amb  $10^{12} + 10^5 + 36 \cdot 10^4$  homes i l'altra, ni més ni menys, amb un de l'ordre de  $10^{62}$ .

En texts hindús sobre la vida de Buda apareixen, també, nombres enormes. Per exemple, en el *Lalitavistara Sutra* es parla de "vuitanta quatre centenes de miler de *niyuta* de *koti*" que representa un nombre d'ordre  $10^{21}$ . A més, es donen noms propis a potències de 10 d'exponent senar fins a  $10^{29}$  (*paduma*). Aquest nombre ens permetrà comptar "fins al darrer i més fi gra de sorra apilat a les alçades de les muntanyes".



Imatge de Siddarta Gautama (Buda)

No sempre a totes les obres els noms coincideixen amb les mateixes potències. Una mesura del que és, segons la cultura hindú, un "nombre impossible de comptar" és l'*asankhyeya*, "el total de totes les gotes de pluja que en deu mil anys caurien a diari sobre el conjunt dels mons". Alguns llibres situen l'*asankhyeya* en  $10^{13}$ , altres en  $10^{97}$  i encara alguns en  $10^{140}$ .

Al moviment religiós *jaina* (entre els segles IV a.n.e i VI n.e.) tenien mesures de temps realment increïbles (Gheverghese, 1996):

- **rajju**: la distància recorreguda per un deu en sis mesos recorrent cent mil *yojanna* en cada obrir i tancar d'ulls. (El *yojanna* són uns 10 km; cent mil seran al voltant del milió de quilòmetres)
- **playa**: el temps que trigaria en buidar-se un recipient cúbic d'un *yojanna* de costat ple amb llana de xais nadons si es treu una fibra de llana cada cent anys.
- **shirsa prahelika**:  $756 \cdot 1011 \cdot (840000)^{28} \approx 10^{194}$  dies

L'astronomia, barrejada amb la religió, ens dona també altres cicles temporals enormes. Al *Sûryasiddhânta*, un text originari, en les seves primeres versions, del segle IV, que explica el Sistema del Món, es parla del "Gran Període" (*Mahâyuga*), cicle en que tots els astres tornen a estar al mateix lloc després d'haver fet cadascú un nombre complet de revolucions. El *Mahâyuga* està dividit en quatre subperíodes temporals en la següent proporció de durada 4:3:2:1. El darrer, anomenat *Kaliyuga* és el que estem vivint, per tant 1/10 del "Gran Període". Els càlculs de la seva durada, que fan combinar dades dels cicles lunars, amb l'any sideral, els equinoccis dona al *Kaliyuga* una durada de 432 000 anys. Però el matemàtic Aryabhata, a cavall entre els segles V i VI, va recalculer-ho en 1 080 000 anys. Això situa el "Gran Període" en aproximadament uns deu milions d'anys. Només falta dir que estem parlant d'anys divins. Un any diví són 360 anys humans!

## Una clau per escriure nombres grans: eliminar alguns signes

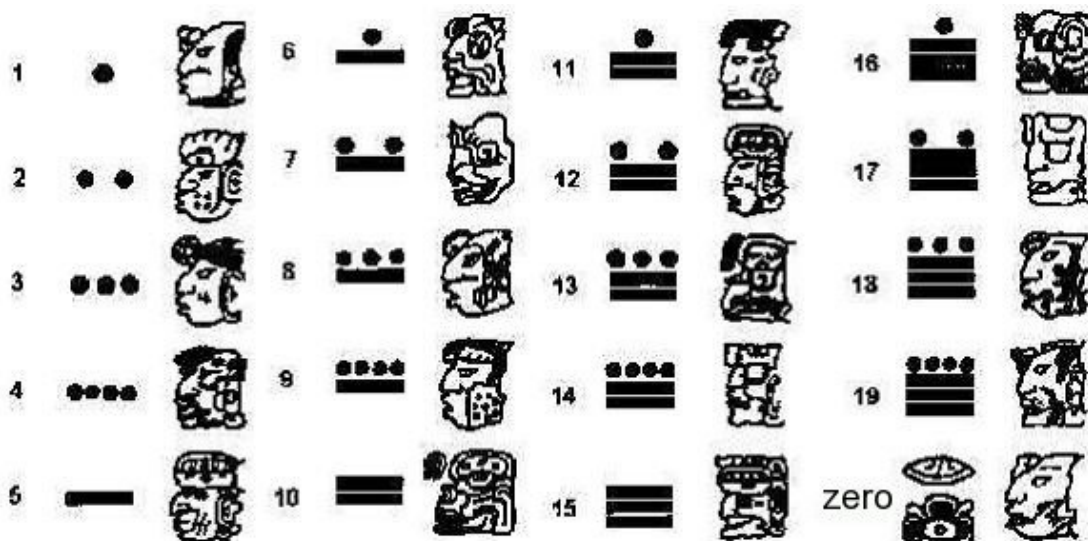
Com hem vist les primeres necessitats de descriure (i escriure) nombres enormes provenen purament de la imaginació humana. Sigui per raons relacionades amb la religió o no. Un cas conegut també és el d'Arquímedes que al seu llibre *L'arenari* per provar que els grans de sorra del mar no són infinits sinó numerables va fer un càlcul d'aproximadament  $10^{63}$  grans de sorra. Però hem vist que el sistema de numeració grega no permetia escriure nombres de tal enormitat. Per això Arquímedes va haver d'inventar tot un sistema nou per escriure aquestes quantitats. La seva



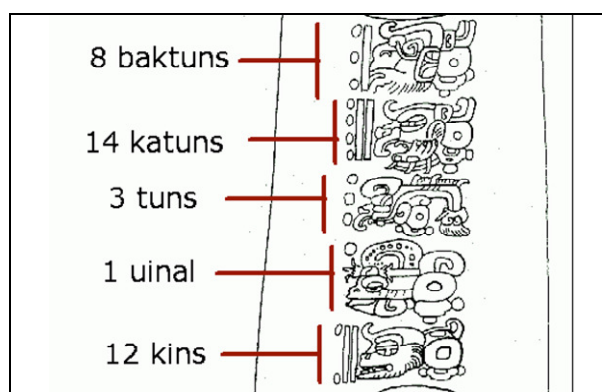
solució va consistir en treballar amb potències de 10 amb exponents múltiples de vuit<sup>11</sup>.

Però Arquímedes es va plantejar una qüestió purament puntual per resoldre un problema concret. A les cultures maies i hindú era un problema general. Hem vist que els primers tenien noms i signes especials per a cada potència de 20 (amb l'anomalia del 3r ordre esmentada) i els segons noms especials per pràcticament cada potència de deu. No és estrany. Totes les numeracions que hem vist fins ara tenen un mot o un signe per a cada potència de la base. També hem vist que l'ús de la multiplicació a l'estil de la numeració xinesa clàssica redueix la repetició additiva de signes. El sistema maia d'escriure la cronologia de *compte llarg* és un sistema semblant al xinès. Mirem-lo amb més atenció.

Els maies utilitzaven un doble sistema d'escriptura numèrica: un sistema amb punts (de valor 1) i ratlles (de valor 5), i un altre amb dibuixos de caps, semblants als que hem vist pel dia, el mes, l'any... Aquesta darrera numeració es coneix com a sistemes de *caps variables* o *cefalomòrfica*.



Caps diferents a aquests, com hem vist a l'estela Leyden, representaven les unitats de temps (kin, uinal, tun...) cadascuna amb el seu valor numèric també (1, 20, 360,...). A les datacions de *compte llarg* s'acostumaven a combinar els signes numèrics de *punt i ratlla* amb els dels *caps*. En aquest cas els nombres s'escriuen verticalment.



Aquest sistema és semblant al xinès. Un nombre davant d'un grau d'ordre ens diu quantes unitats tenim d'aquell grau. Només cal multiplicar:

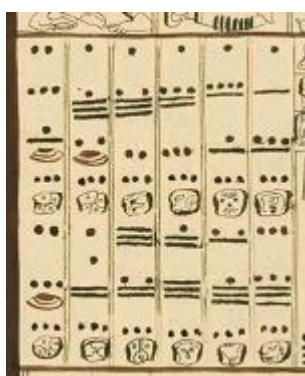
<sup>11</sup> Per conèixer amb més detall la numeració inventada per Arquímedes es pot consultar TORIJA HERREIRA, R. (1999): *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Nivola. Madrid.

8 baktuns	x 144 000	1 152 000
14 katuns	x 7200	100 800
3 tuns	x 360	1080
1 uinal	x20	20
12 kins	x 1	12
<b>Total</b>		<b>1 253 912</b>



Al *Còdex de Dresde* podem descobrir, un canvi important en la forma d'escriure els nombres. Aquest còdex maia és un dels únics quatre llibres maies que encara es conserven, i és un tractat d'astronomia i endevinació. Es tracta d'una còpia del segle XII d'un altre document més antic. En ell trobarem els punts i les ratlles deslligades dels dibuixos corresponents a les potències de 20.

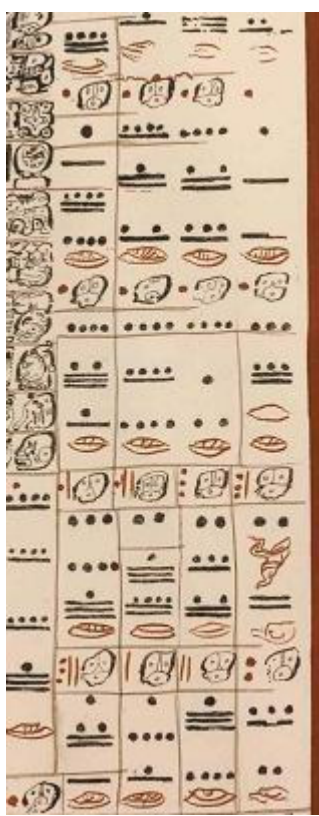
Ho podem observar en aquest detalls d'algunes de les seves pàgines.



pàgina 1



pàgina 43



pàgina 24

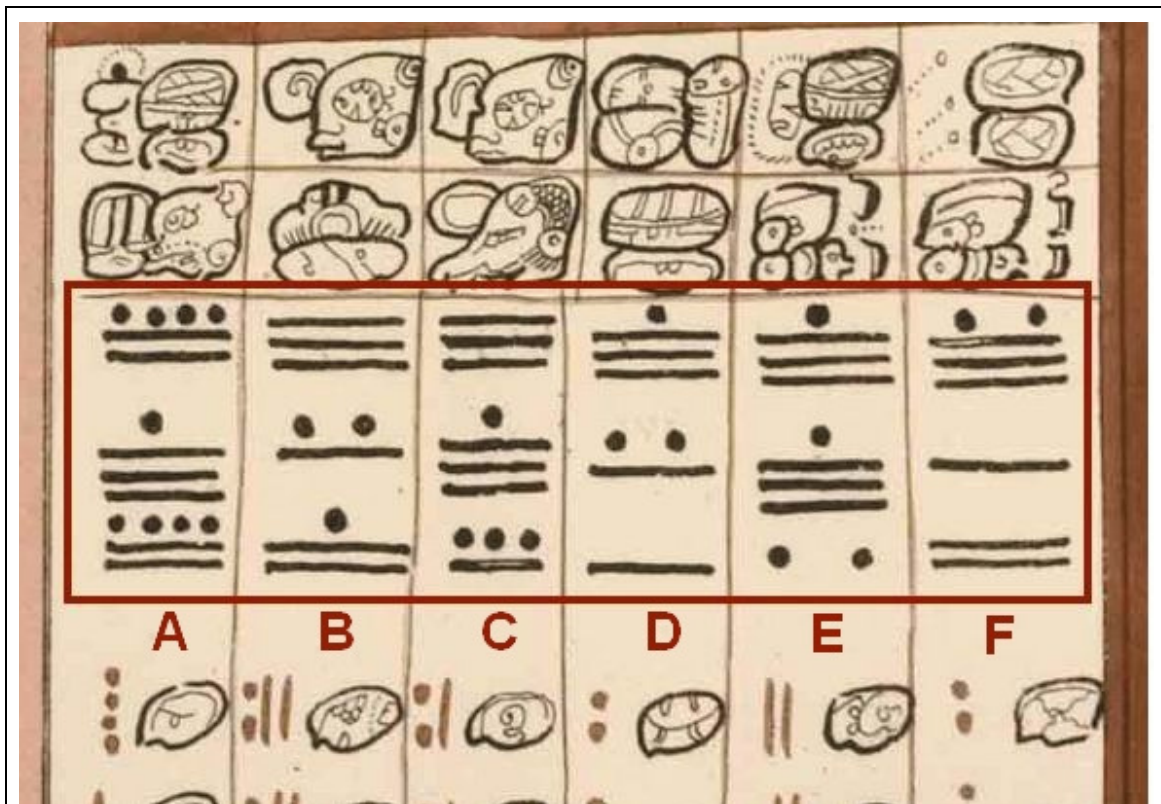




















pàgina 69



pàgina 62

Els símbols que acompanyen l'ordre han desaparegut: per la posició entenem de quin grau es tracta. Observem un detall de la pàgina 51 del *Còdex de Dresde*, la seva interpretació numèrica i la seva conversió al nostre sistema.



<b>A</b>		<b>14</b>	x360	5096	<b>B</b>		<b>15</b>	x360	5400
		<b>16</b>	x20	320			<b>7</b>	x20	140
		<b>14</b>	x1	14			<b>11</b>	x1	11
<b>5430</b>					<b>5551</b>				
<b>C</b>		<b>15</b>	x360	5400	<b>D</b>		<b>16</b>	x360	5760
		<b>16</b>	x20	320			<b>7</b>	x20	140
		<b>8</b>	x1	8			<b>5</b>	x1	5
<b>5728</b>					<b>5905</b>				
<b>E</b>		<b>16</b>	x360	5760	<b>F</b>		<b>17</b>	x360	6120
		<b>16</b>	x20	320			<b>5</b>	x20	100
		<b>2</b>	x1	2			<b>10</b>	x1	10
<b>6082</b>					<b>6230</b>				


Amb la desaparició dels símbols indicadors del grau d'ordre els maies aconseguiren escriure nombres tan grans com van necessitar. Amb tres pisos el nombre més gran que es pot escriure és 7.239 ( $19 \cdot 360 + 19 \cdot 20 + 19$ ), però afegint un pis més, de valor 7200 ( $20 \cdot 360$ ) arribem a 144039. Amb set pisos sobrepassem els mil milions. Podem fer una taula que reculli els màxims amb els que es pot arribar amb cada incorporació d'un pis:

Pis	Valor	Construcció	Màxim
1	1		19
2	20	$20 \cdot 1$	399
3	360	$18 \cdot (20 \cdot 1)$	7.239
4	7.200	$20 \cdot (18 \cdot 20 \cdot 1)$	144.039
5	144.000	$20 \cdot (20 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 1)$	2,880.039
6	2,880.000	$20 \cdot (20 \cdot 20 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 1)$	57,600.039
7	57,600.000	$20 \cdot (20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 1)$	1.152,000.039
...	...	...	...

Nombres de l'ordre de  $10^9$  amb només dos signes: un punt i una ratlla

## Un problema nou

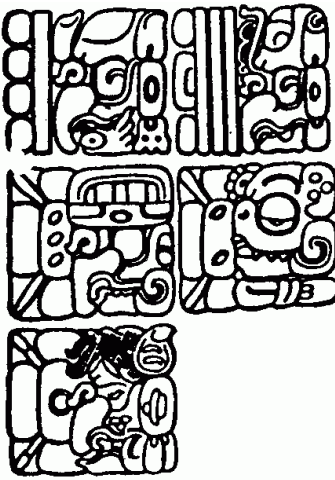
Observem l'estela E de Quiriguà on trobem una nova data representada:



9  
baktuns

0  
tuns

0  
kins



17  
katuns

0  
uinals

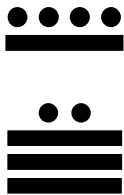
**$9 \cdot 144000 + 17 \cdot 7200 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 0 \cdot 1 = 1\,418\,400$  dies**

(A la imatge el 17 de la dreta sembla un 18 per un petit ornament entre els dos punts)

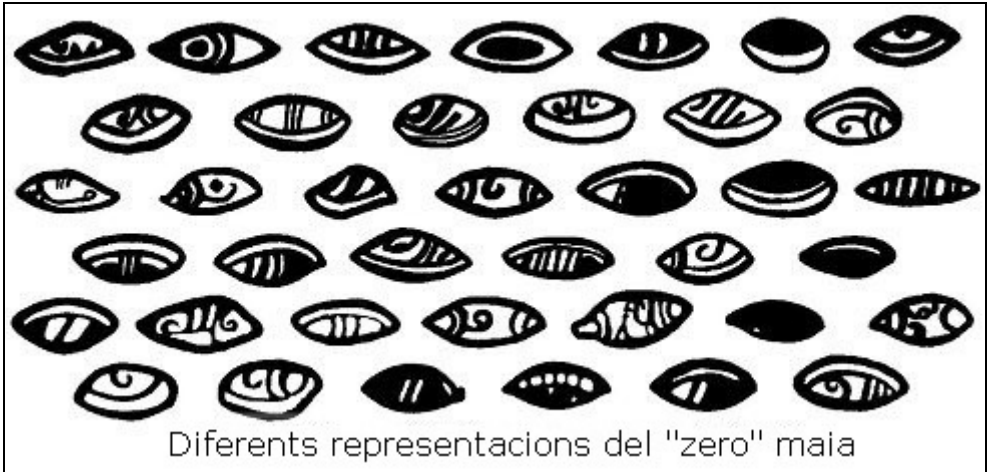
Les figures que representen els *tuns*, *uinals* i *kins* no tenen nombres escrits: no en tenim d'aquestes unitats. Però si fem l'equivalent sense els caps, tal com hem vist abans podríem confondre aquest  $[19;17;0;0;0]$  amb  $[19;17]$ , que representaria un nombre molt més petit<sup>12</sup>:

<sup>12</sup> Quan representem nombres posicionals de base diferent a 10 hofarem entre claudàtors amb les unitats de cada ordre separades amb punts i comes.

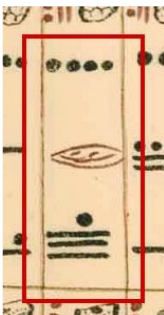




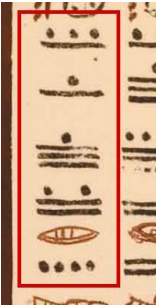
	9	x20	180
	17	x1	17
197			

La solució a aquest problema la trobem al mateix *Còdex de Dresde*. Es tracta d'afegir un signe que indiqui que un pis està buit, que en aquell ordre no tenim unitats. El signe triat va ser una mena de forma ovalada que, segons alguns autors, representa una closca d'algun tipus de mol·lusc. És una de les primeres simbolitzacions del **zero** conegudes.



Observem alguns exemples del *Còdex de Dresde* i les traduccions numèriques corresponents.



 pàgina 64	4	x360	1 440	 pàgina 70	9	x 7200	64 800
	0	x20	0		15	x360	5 400
	16	x1	16		0	x20	0
1 456					0	x1	0
70 200				70 200			

 pàgina 71	<b>2</b>	x7200	14 400	 pàgina 71	<b>8</b>	x144 000	1 152 000
	<b>0</b>	x360	0		<b>6</b>	x7200	43 200
	<b>8</b>	x20	160		<b>16</b>	x360	5 760
	<b>0</b>	x1	0		0	x20	0
					4	x1	4
<b>14 560</b>				<b>1 200 964</b>			

## El primer zero: el babilònic

La primera simbolització del *zero* que coneixem no és la maia. La numeració *babilònica erudita*, uns mil anys abans, ja n'havia fet servir un també. De la mateixa manera que a la maia aquest *zero* indicava que hi havia un espai buit en un ordre determinat. El sistema de numeració assírio-babilònic va arribar a una solució semblant a la maia i seguint un procés històric també similar. No deixa de cridar l'atenció que en dos llocs del món absolutament sense contacte es segueixin evolucions semblants i s'arribin a solucions pràcticament idèntiques pels mateixos problemes. Les úniques diferències importants entre els sistemes maia i babilònic són les bases auxiliar i principal: pel maies eren 5 i 20 i pels assiris 10 i 60. Estudiem breument la numeració babilònic.

En aquesta numeració, com a la maia, és fan servir dos signes: un de valor unitat i un altre de valor 10.

1	10
	

Els nombres de l'1 al 59 s'escriuen així:

1	11	21	31	41	51
2	12	22	32	42	52
3	13	23	33	43	53
4	14	24	34	44	54
5	15	25	35	45	55
6	16	26	36	46	56
7	17	27	37	47	57
8	18	28	38	48	58
9	19	29	39	49	59
10	20	30	40	50	

La base principal és 60, per tant les quantitats indicades a cada lloc (llegint d'esquerra a dreta) s'han de multiplicar per les successives potències de 60.

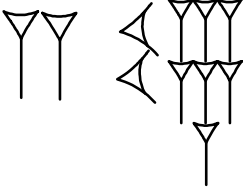
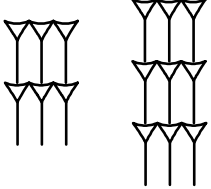
...	$60^3$	$60^2$	$60^1$	$60^0$
...	x 216 000	x 3 600	x 60	x 1

Observem un exemple de la *tauleta IPC 25* on trobem inscrit el nombre [21;10;2;50].

	21	10	2	50
	x216000	x3600	x60	x1
	4 536 000	36 000	120	50
	<b>4 572 170</b>			

Si d'un determinat ordre no en tenim unitats, i no s'indica de cap manera, només el context ens pot ajudar a interpretar el nombre. Un exemple el podem trobar a la *tauleta AO 17264* del Museu del Louvre (a la que es resol un problema de bisecció de figures trapezoidals) on trobem un nombre i el seu quadrat.



<p>Calcula el quadrat de...</p>	 <p>[2;27]</p>	<p>i trobaràs...</p>	 <p>[6;9] ?</p>
---------------------------------	---	----------------------	--

Si traduïm els nombres a la nostra numeració decimal veurem més fàcilment que alguna cosa no quadra:

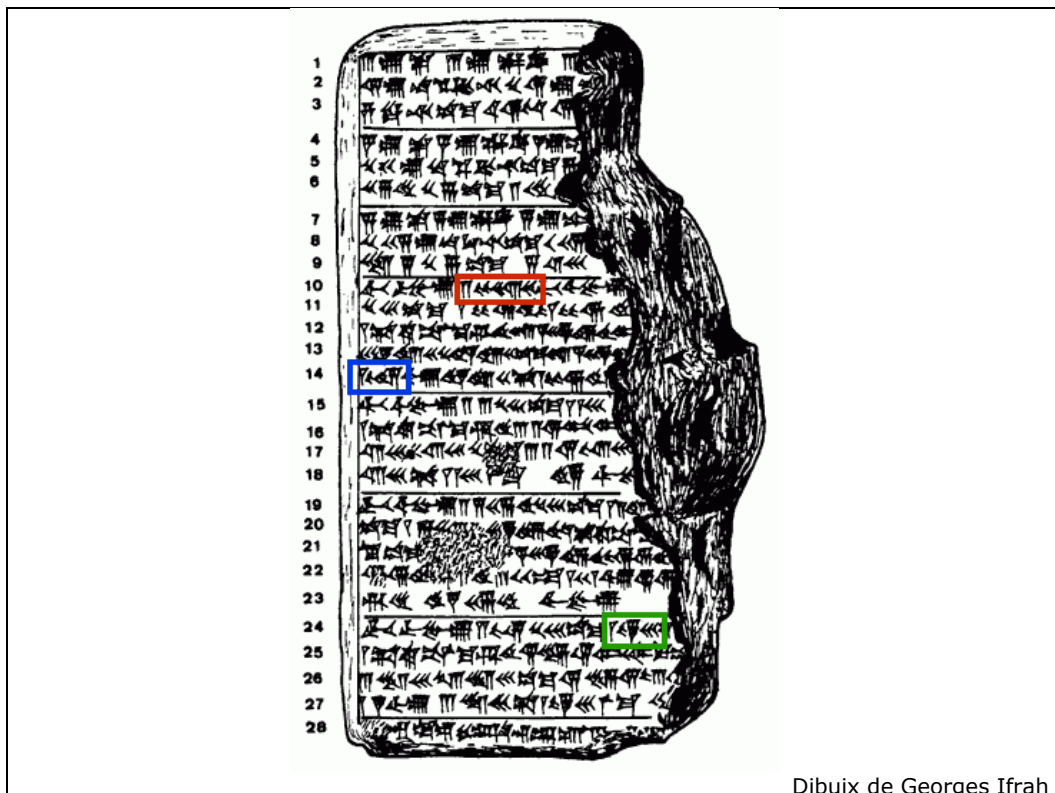
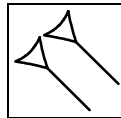
- $[2;27] \Rightarrow 2 \cdot 60 + 27 \cdot 1 = 147$  ( $147^2 = 21\,609$ )
- $[6;9] \Rightarrow 6 \cdot 60 + 9 \cdot 1 = 369$

Si, en canvi, interpretem que entre el 6 i el 9 hi ha un espai i el nombre és  $[6;0;9]$  el càlcul quadra:

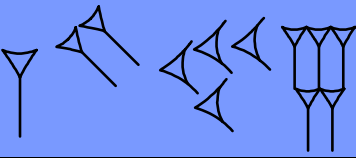
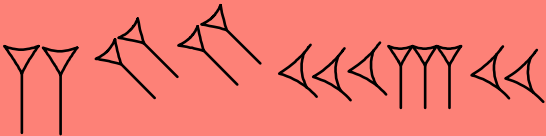
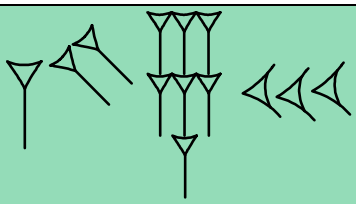
- $[2;27] \Rightarrow 2 \cdot 60 + 27 \cdot 1 = 120 + 27 = 147$  ( $147^2 = 21\,609$ )
- $[6;0;9] \Rightarrow 6 \cdot 3600 + 0 \cdot 60 + 9 \cdot 1 = 21\,600 + 9 = 21\,609$

Les primeres aparicions d'aquesta numeració són del 1800 a.n.e però no és fins al segle IV a.n.e, és a dir, uns 1300 anys després, que no trobem una tauleta, localitzada a Uruk (AO 6484), on es resol aquesta qüestió amb uns signes cuneïformes que indiquen espais buits.



Zero assiri



Dibuix de Georges Ifrah

	
[1;0;45]	$1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 45 \cdot 60^0 = 3\,645$
	
[2;0;0;33;20]	$2 \cdot 60^4 + 0 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 33 \cdot 60^1 + 20 \cdot 60^0 = 25\,922\,000$
	
[1;0;7;30]	$1 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 7 \cdot 60^1 + 30 \cdot 60^0 = 241\,230$

En principi es va pensar que aquest símbol només es va fer servir en posicions intermèdies però més tard, estudiant altres tauletes astronòmiques, es van trobar, alguns casos, amb zeros finals. Un exemple el podem observar a la tauleta *BM 32651*, es van trobar els nombres 60 i 180 escrits així

	
60 [1;0]	180 [3;0]

## El zero com a nombre o com a indicador

Hi ha tota una discussió sobre si el zero maia o el babilònic són autèntics zeros, entesos com a nombres. Aquesta discussió enllaça perfectament amb aquella que es centra en si el zero és un nombre natural o no. Quan diem frases com "no hi ha cap cadira", en comptes de "hi ha zero cadires", o "no hi ha ningú" o "la sala està buida", en comptes de "hi ha zero espectadors" estem exclouint el zero dels nombres naturals que, com s'ha dit abans, són "els que serveixen per comptar" (curiosament gairebé sempre fem servir el plural amb el nom que acompanya al zero!). En textos matemàtics de Susa trobem que els escribes diuen frases com "20 menys 20... tu veus" o "el gra s'ha esgotat" quan s'arriba a zero en un problema de distribució. En problemes de repartiment justos diem "no me'n sobra cap" en comptes de dir que "el residu és zero".

La qüestió del zero radica en que no ens cal per res per realitzar les operacions de la vida quotidiana. Ningú surt a comprar zero peixos. Es tracta, d'alguna manera, del més civilitzat dels cardinals, i si ens veiem obligats a fer-lo servir és només per l'exigència de formes elaborades pel pensament.

Alfred North Whitehead (1861-1947)

En certa manera es ve a considerar que el zero maia i el babilònic indiquen només absència. Perquè el zero sigui nombre ha d'intervenir en les operacions, fer valer el seu valor nul (ni afegeix, ni treu).

Hem d'esperar als matemàtics indis del segle VI perquè el zero agafi qualitat de nombre. Brahmagupta es va plantejar quin era el resultat de multiplicar o dividir per zero (Seife, 2006) i va donar la regla de que el resultat de multiplicar per zero era zero. Es va equivocar al dir que un nombre dividit per zero també era zero. Brahmagupta va anar mes enllà i ens va donar les regles per sumar i restar negatius que tractava com *guanys* o *pèrdues*. Hem de pensar que el càlcul amb negatius fa canviar el paper del zero en el context dels nombres ja que passa a representar una quantitat nul·la. Acceptar aquest fet no era tan fàcil com ens ho sembla ara. El gran matemàtic francès Lazare Carnot a l'any 1803 encara es resistia a la seva acceptació amb afirmacions com aquesta:

"Per a obtenir realment una quantitat negativa aïllada, seria necessari restar una quantitat efectiva de zero, llevar una mica de res: operació impossible. Com concebre doncs una quantitat negativa aïllada?"

Carnot<sup>13</sup>

L'error sobre la divisió per zero el va intentar corregir 600 anys més tard, al segle XII, un altre matemàtic indi: Bhaskara.

"Una quantitat dividida per zero es converteix en una fracció el denominador de la qual és igual a zero. Aquesta fracció té com valor una quantitat infinita. En aquesta quantitat en la qual zero és el divisor, no hi ha alteració encara que es sumin o es restin molts; així com no van tenir lloc canvis en l'infinit i immutable Déu quan es creen o es destrueixen els mons, encara que nombrosos ordres d'éssers siguin absorbits o creats."

Bhaskara<sup>14</sup>

Podem observar que encara no s'accepta la impossibilitat de la divisió per zero.

En tot cas el que sí que és cert és que a la numeració babilònica erudita per primera vegada apareix un signe per indicar que "no hi ha res", per designar un "espai buit". Potser no és un zero complet, però és un zero al cap i a la fi.

## Limitacions de les numeracions maia i babilònica

Definim alguns dels objectius que hem de buscar en una bona numeració:

1. no ha de tenir gaires signes per aprendre de memòria (defecte de la numeració grega alfabètica)
2. no s'han d'acumular gaires signes per facilitar la lectura (defectes de les numeracions egípcia, grega acrofònica o sumèria)
3. s'han de poder escriure nombres progressivament més grans sense incorporació de nous signes (defecte de totes les numeracions esmentades i de la xinesa tradicional)

<sup>13</sup> Citat a l'article de BOYÉ, ANNE: *Quelques éléments d'histoire des nombre négatifs*; traducció a [http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/fundoro/es\\_confboyee.htm](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/fundoro/es_confboyee.htm)

<sup>14</sup> Citat a l'article d'O'CONNOR J. J. i ROBERTSON E. F. (2000): *A history of Zero*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero.html>

Superen aquests objectius les numeracions maia i babilònica? La resposta és que superen el 1r i el 3r però no el segon: continuen havent-hi molts signes acumulats en algunes quantitats. Analitzem alguns dels seus defectes:

- totes dues utilitzen només dos signes de valors 1 i 5 (maia) o 1 i 10 (babilònica). Això obliga a acumular molts signes junts.
- totes dues tenen bases molt grans, 20 per a la maia i 60 per a la babilònica. Aquest factor, combinat amb l'ús de només dos signes, també incrementa l'acumulació de signes. A més obliguen a l'ús d'una base auxiliar (5 i 10 respectivament) que complica la numeració.
- en el cas de la numeració maia podem afegir que la base es trenca a l'ordre 3 que en comptes de valer 400 ( $20^2$ ) val 360 per ajustar-se als usos calendaris. Això dificulta, fora d'aquest camp, el seu ús operatori generalitzat.

De totes dues numeracions encara podem afegir un aspecte no tractat fins ara i que no deixa de tenir una certa importància: la relació entre la "longitud del nombre" i la "quantitat que representa". Oralment això també passa: el numeral "mil" és molt més curt que el numeral "tres-cents vuitanta-set". Però no sembla tan important perquè no "treballem", no "operem" amb els noms dels nombres. En canvi sí que ho fem amb les seves representacions escrites. Observem un parell de casos de cada numeració.

Maia		Babilònica erudita	
[5;1;6] 1826	[1;4;17] 457	[10;1;10] 36 070	[3;49] 229
1826 > 457		36070 > 229	

Es podrien posar altres exemples amb les numeracions vistes fins ara però només cal observar un amb numeració romana:

**M > DCCCLXXXVIII**

La concordança quantitat-longitud ens ajuda visualment d'una manera força ràpida a ordenar els nombres i a fer-nos una primera idea de la seva dimensió.

## La solució final: les numeracions posicionals

Per trobar una solució ideal a l'escriptura de la numeració hauríem de combinar algunes de les idees de la numeració xinesa tradicional amb les de les numeracions maia i babilònica.

- de la xinesa hauríem d'agafar la idea de representar les unitats de l'1 al 9 amb signes diferents.
- de les maia i babilònica la d'ometre el signe del grau d'ordre i interpretar aquest valor pel lloc que s'ocupa.

Observem l'evolució de la numeració *tàmil* del Índia Meridional comparant l'escriptura d'un mateix nombre en una versió antiga (del 600 n.e) i una de més moderna:

Numeració moderna	Tamil antiga	Tamil moderna
3782	ந க் த எ ன ன அ ய உ	ந௭௮௨

El procés de transformació d'un sistema a l'altre es fa fàcil de veure quan s'identifica cada signe. Observem així que el que es fa desaparèixer són els valors d'ordre pels quals es multiplica. A la segona escriptura **sobreentenem** que el 3 es multiplica per 1000, el 7 per cent i el 8 per 10.

3 1000 7 100 8 10 2  
ந க்ஷ எ ன் அ ய உ

ந க்ஷ எ ன் அ ய உ

ந்ஷஅஉ

3 7 8 2

Amb la numeració xinesa tradicional també s'han vist alguns documents amb una escriptura abreujada dels nombres.

7948											
七	千	九	百	四	十	八	⇒	七	九	四	八
7	1000	9	100	4	10	8		7	9	4	8

Però els primers en desenvolupar una numeració abreujada van ser els hindús.

## La numeració índia

La diversitat i variacions dels signes emprats a la Índia per representar els nombres de l'1 al 9 i del zero (i que a partir d'ara anomenarem **xifres**), és molt gran: les xifres brahmi, nagari, marathi, punjabi, sindhi, qurumukhi, gujarati...

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	+	h	५	७	५	७

Xifres brahmi - Al voltant del segle I n.e.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
१	२	३	४	५	६	७	८	९	०

Xifres nagari - Al voltant del segle XI n.e.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
—	=	≡	५	६	७	८	९	३
Xifres guptes - Al voltant del segle IV n.e.								

És tal la diferència de grafies que a molts textos escrits no hi havia seguretat de la interpretació de les xifres. D'aquí que s'emprés una altra mena d'escriptura més "oral" que també les representés. Els numerals hindús es llegien xifra a xifra al revés de com ho fariem nosaltres. Així el nombre 5407 es llegiria: "set, zero, quatre, cinc". Per evitar repeticions de xifres seguides (com al nombre 55555) hi havia tota una mena de sinonímia poètica pel nom de cada xifra que, a més, podia servir com a regla mnemotècnica per recordar els nombres. Així en un text astronòmic titulat *Suryasiddhanta* trobem un vers que diu:

Dels àpsis de la Lluna en *yuga*<sup>15</sup>  
Foc. Buit. Genets. *Vasu*. Serp. Oceà

Ifrah (1997:930)

Aquest text es pot interpretar com "La quantitat de revolucions de la Lluna en un *yuga* és de Tres.Zero.Dos.Vuit.Vuit.Quatre (488203)". Es pot observar com la xifra 8 té dos noms: *vasu* i *serp*.

El valor de cadascuna de les xifres depèn del lloc que ocupa. En el nombre 555 el primer cinc representa en realitat *cinc-cents*, el segon *cinquanta* i el tercer *cinc unitats*. Cada lloc representa, ordenada i successivament, una potència de la base, 10 en el cas de la numeració hindú. El signe numèric, la xifra, que ocupa un lloc determinat multiplica el valor del signe pel del lloc. Observem un exemple amb les xifres modernes.

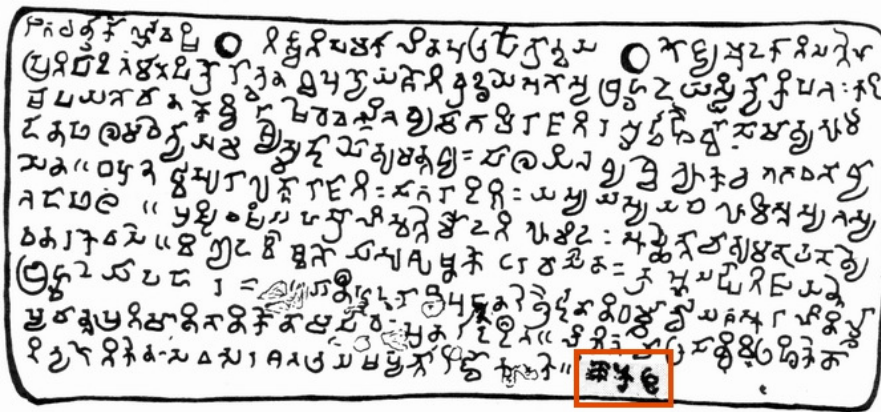
4392			
4	3	9	2
x1000 ( $10^3$ )	x100 ( $10^2$ )	x10 ( $10^1$ )	x1 ( $10^0$ )
4000	300	90	2

Aquest tipus de numeracions es diuen **posicionals**, per destacar la importància que pren la posició del signe en el nombre escrit. La numeració maia i babilònica que hem vist abans també són posicionals.

Hi ha hipòtesis no confirmades de que la numeració posicional índia és de creació independent de les possibles influències babilònica o xinesa, malgrat el possible contacte amb totes dues numeracions. En quant a la independència de l'assírio-babilònica dos dels arguments de pes són la diferència en el temps i en la base triada per treballar, 10 en comptes de 60; la base babilònica només es feia servir, per influència grega, en les subdivisions angulars que s'utilitzaven en astronomia, per tant amb un ús fonamentalment fraccionari. Els arguments en defensa de la independència de la numeració xinesa (especialment en comparació a la *numeració de barres* que es feia servir pel càlcul i que veurem més tard) es basen en la diferència de grafies.

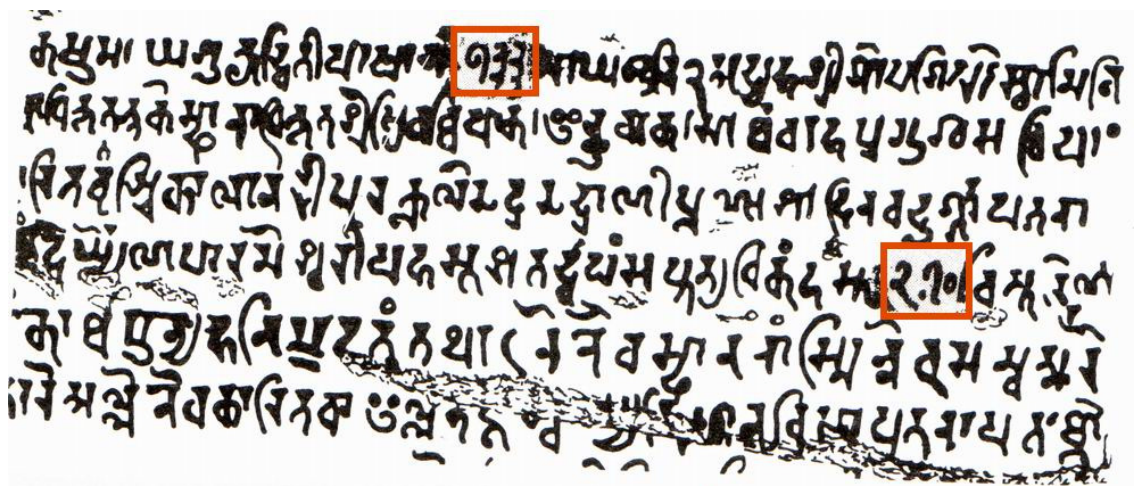
El primer document escrit on veiem el sistema posicional hindú escrit és una carta escrita sobre aram on trobem el nombre 346. Està datada al segle VI n.e.

<sup>15</sup> Un *yuga* es refereix al *Kaliyuga*, el cicle còsmic de 4 320 000 anys



Dibuix de G. Ifrah

Més o menys de la mateixa època són uns escrits del matemàtic Brahmagupta on recomana descriure el zero "amb els noms del cel". Però no és fins a una inscripció litogràfica que no trobem el primer zero escrit. Es tracta d'unes pedres trobades al temple de *Vaillaabhattachasvamin* prop de la ciutat de Gwailor. Està datada al 876 n.e. i hi trobem escrits els nombres 933 i 270.



Dibuix de G. Ifrah

Hi ha un document anterior, de l'any 683, localitzat a l'actual Cambodja. Es tracta d'una inscripció *khmer* trobada a Trapeang Prei, on es veu escrit el nombre 605 amb un zero en forma de punt; però es pensa que estava influenciada per la numeració hindú.



Tot i així hi ha autors que encara parlen d'un zero anterior. Es tracta d'un zero no representat per un signe (punt, cercle...) sinó amb el seu nom sànscrit: *Śhunya* (buit). El text en el que s'ha trobat és el *Lokavibhaga*, un tractat de cosmologia jainita de l'any 458 n.e. (Crump, 1993) en la que els nombres s'anomenaven xifra a xifra tal com s'ha explicat anteriorment.

## Tot resolt i encara més

Amb la numeració hindú tenim tot allò que li podem demanar a un bon sistema de numeració:



- una base de mida adient: ni massa gran ni massa petita
- pocs signes per aprendre
- longitud limitada dels nombres escrits (fet que facilita la lectura)
- possibilitat il·limitada d'escriure nombres de qualsevol grandària amb l'ús exclusiu d'aquests signes
- correspondència entre la longitud escrita i la grandària del nombre representat

Totes aquestes característiques, però, no en serien prou perquè aquest sistema de numeració s'hagués imposat, com ho ha fet, sobre tots els altres. La resistència als canvis socials són molt grans. En èpoques antigues una conquesta implicava una imposició de sistemes de mesura ja que era una forma més d'ordenació i control. En els nostres temps actuals, tot i l'acord, hi també observem resistència a aquests tipus de canvis. Només cal mirar sinó els problemes que ha comportat al Regne Unit la imposició governamental del Sistema Mètric Decimal, fins al punt de que al maig del 2007 s'ha permès indefinidament l'ús de les unitats tradicionals. La preponderància econòmica i política dels EEUU és l'únic argument que permet que estiguin encara ancorats al sistema anglosaxó de mesures i ni es plantegin la possibilitats de canvi. Podem mirar més exemples de "resistència al canvi":

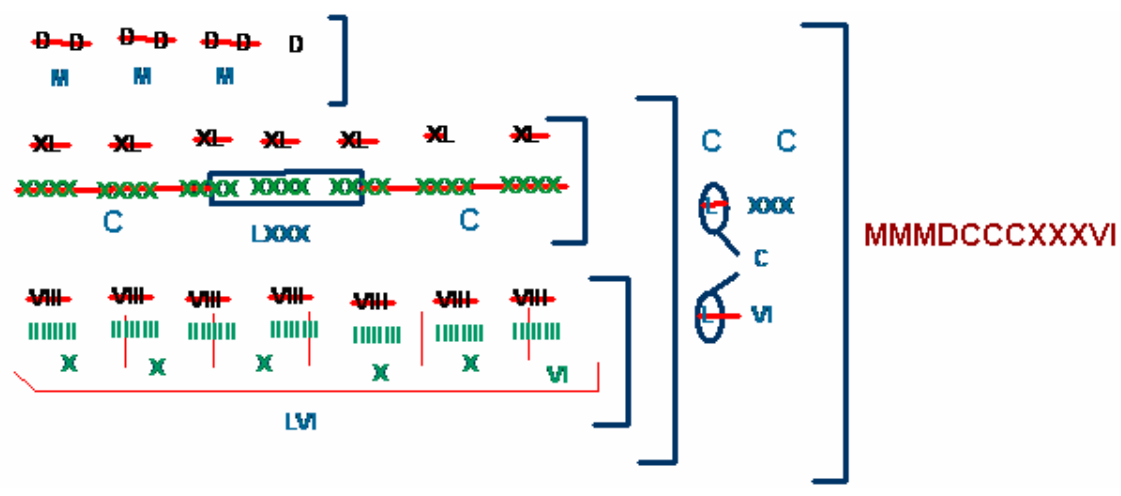
- la numeració romana encara té usos residuals a la nostra societat, la majoria de vegades en relació a qüestions ordinals: els capítols dels llibres, els segles, els numerals de reis i papes... Un cas no tan ordinal és el de l'esfera del rellotge (per què es diu esfera a un cercle?).
- les numeracions xinesa tradicional o japonesa són utilitzades encara en determinats àmbits.
- l'adopció d'un calendari internacional (el gregorià adaptat) no ha desbancat els usos religiosos d'altres calendaris (el musulmà, l'hebreu...).
- l'ús dels àbacos en societats com la xinesa, japonesa o russa tot i tenir caixes registradores a les botigues. La mateixa resistència dels nostres botiguers als anys 70 a fer els càlculs amb calculadora i persistir amb el càlcul escrit.
- la conversió a pessetes, per comprendre les quantitats, des de la imposició de l'euro.

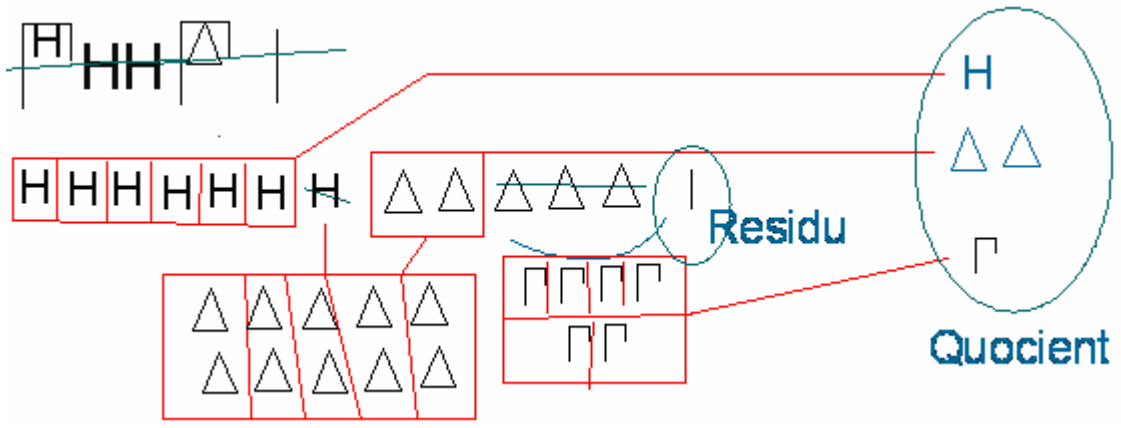
¿Què és el que ha fet que la numeració hindú fos adoptada sense gaires dubtes pels àrabs i, a través d'ells, per Europa i el món? La resposta està en el càlcul aritmètic.

Mal que bé, i com hem dit diverses vegades, una cultura pot arribar a comptar i a escriure els nombres fins allà on li portin les seves necessitats. La d'escriure nombres molt grans és una necessitat artificial, creada per la pròpia cultura. La numeració posicional babilònica, pel que sabem, va arribar a una numeració posicional sense tenir aquesta necessitat concreta. L'existència del zero és exclusiva dels sistemes posicionals. Tot i ser una gran aportació, perquè va molt més enllà del simple signe numèric per indicar un espai buit, no justifica per ell mateix l'esforç de canviar de sistema de numeració. El gran avantatge de la numeració hindú és que es pot calcular de manera fàcil amb els propis signes. De fet, fins i tot, permetien combinar simultàniament, com cap altra numeració anterior, les funcions de registre i càlcul.

## El zero invisible

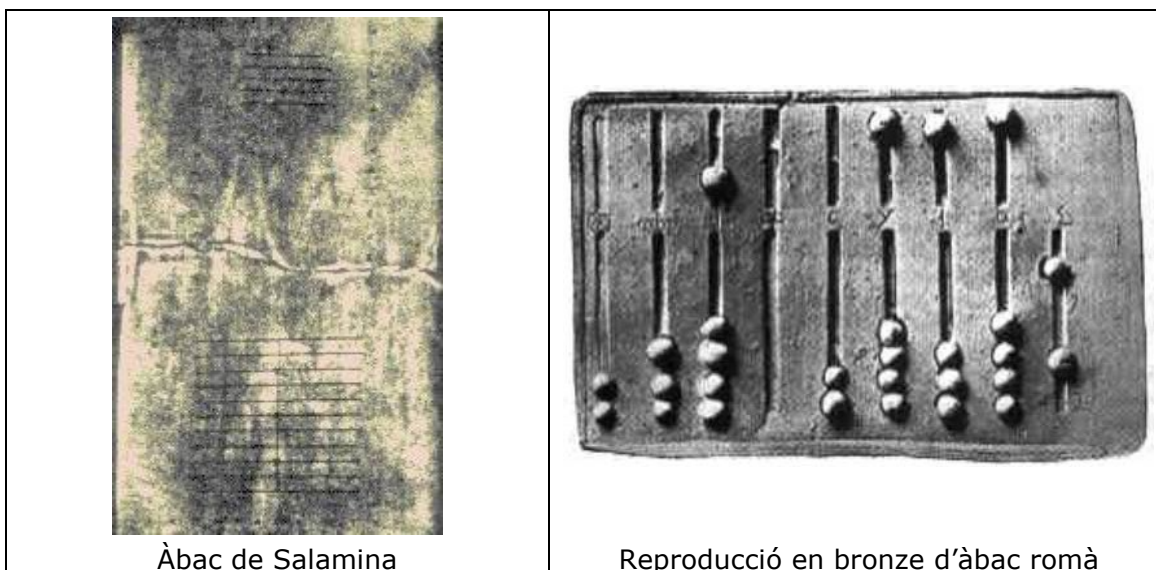
Pràcticament qualsevol numeració, inclosa una amb tantes anomalies com la romana, permet el càlcul amb les seves xifres. Una altra cosa és que el càlcul sigui còmode. Aquest aspecte es destaca més quan l'operació amb la que tractem és la multiplicació o la divisió. Però no vol dir que sigui impossible si anem apliquem sistemes de conversions d'uns signes a uns altres.

Exemple inventat de multiplicació amb numeració romana	
548 x 7	DXLVIII set vegades
	
<b>548 x 7 = 3836</b>	

Exemple inventat de divisió amb numeració grega acrofònica	
751 : 6	Fer 6 parts de 751
	
<b>751 : 6 = 125 (residu 1)</b>	

El procés, com es veu, és lent. Llavors, com es calculava? No pas amb els nombres sinó fent servir àbacs o diferents tipus de taulers. Era més còmode manipular directament algun tipus de fitxa que treballar amb les xifres escrites. Hem vist abans un exemple senzill de resta amb els *càlculi* sumeris. Es pensa que més tard van fer servir àbacs. L'àbac més antic que coneixem, però, és un trobat a l'illa grega de Salamina i que es creu que és dels segles V o IV a.n.e, una mena de tauler que

durant algun temps es va pensar que era d'un joc. També coneixem exemples d'àbacs romans.



Observant l'àbac i sabent com funcionen àbacs més recents com el xinès o el japonès (amb el que aquest àbac romà presenta moltes semblances) podem imaginar-nos, sense entrar en molts detalls, el seu funcionament.

- cada fitxa inferior val una unitat i cada fitxa superior 5
- hi ha columnes per unitats, desenes, centenes...
- les fitxes "compten" quan estan pròximes a l'eix horitzontal.
- el nombre representat aquí és el 2058

Quan a un ordre, en aquest cas les centenes, no tenim unitats, les fitxes no s'activen. Tenim un zero "invisible".

Què podem pensar de tot plegat? Que hi havia un doble sistema:

- un per calcular fet amb materials manipulables que, com es pot veure, és posicional i compta, fins i tot, amb una mena de zero.
- un altre sistema escrit per registrar els resultats.

Tots dos sistemes es complementen perfectament. Podem escriure nombres raonablement grans i podem fer operacions aritmètiques. Quan escrivim els nombres amb numeracions no posicionals no ens cal indicar espais buits. En conseqüència el zero no fa cap funció: no és necessari.

La gran aportació de la numeració hindú és la combinació de la base decimal, el sistema posicional, la inclusió de xifres específiques de l'1 al 9 i, molt especialment,

de la xifra especial corresponent al zero. Tot plegat li dóna un potencial increïble al propi sistema d'escriptura numèrica per a convertir-se en instrument de càlcul.

## Un altre zero invisible: el xinès

Sobre el segle II n.e. a la Xina no es feia servir encara l'àbac ja que disposaven d'un altre instrument de càlcul manipulatiu. Es feia amb unes varetes de bambú o d'ivori, encara que en èpoques més tardanes es van fer també de ferro, fusta o jade. Aquestes varetes, els calculistes, les portaven en petits feixos fàcilment transportables. Les més antigues tenien uns 14 cm de llargada i 2,5 mm de diàmetre, però després es van escurçar per millorar la seva manipulació.

Per operar les varetes es disposaven en columnes seguint estrictament un sistema posicional en base 10. Cada nombre de l'1 al 9 tenia una doble representació: la *heng* i la *tsung*.

<b>Hengs</b>						⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>Tsungs</b>	—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥

Els *hengs* es feien servir per les unitats, les centenets, les desenes de miler... i el *tsungs* per les desenes, els milers, les centenets de milers... És a dir s'alternaven una xifra *heng* i una *tsung* per diferenciar els graus d'ordre de cada unitat. D'aquesta forma s'evitaven confusions. Mirem un parell d'exemples:

6448	55771
⊥     ≡ ⊥⊥	≡ ⊥⊥ ⊥⊥ ⊥

Aquest sistema podia pal·liar certes confusions quan s'havia de deixar un espai buit per separar dos graus d'ordre consecutius. Dos *hengs* o dos *tsungs* junts podien indicar que al grau d'ordre intermedi no hi havia unitats.

5904	2036
≡ ⊥⊥	= ≡ ⊥

Recordem que aquestes varetes es feien servir per calcular, per tant l'espai en blanc tenia una funció operativa, de "zero invisible". Però el sistema està encara obert a ambigüitats. Com es pot indicar, sinó, que falten dos ordres seguits o quan els zeros haurien d'estar al final?

3006 o 36?	24 o 2400?
≡ ⊥	=

Una de les solucions que es van fer servir era combinar la numeració de varetes (*suan zi*) amb la tradicional.

3006	2400
$\equiv$ 千 丁	= 百 百

La solució definitiva va aparèixer quan les varetes es disposaven en una mena de quadrícules que eliminaven tots els possibles errors d'interpretació.

$\Pi$			$\equiv$	$\equiv$	70 043
	$\perp$	$\equiv$	$\equiv$		8 210
$\equiv$		$\equiv$			40 900

A l'obra de Txiu Txiu Shao, al 1247, apareix per primera vegada un cercle per indicar els espais buits, un autèntic zero escrit que, es pensa, va estar influenciat per les xifres hindús.

$\Pi$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\equiv$	$\equiv$	70 043
$\bigcirc$	$\perp$	$\equiv$	$\equiv$	$\bigcirc$	8 210
$\equiv$	$\bigcirc$	$\equiv$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	40 900

Aquest tauler i les varetes van ser un instrument de càlcul prou potent com perquè els matemàtics i calculistes xinesos resolguessin sistemes d'equacions, diferenciant, fins i tot, els nombres positius dels negatius amb varetes de colors diferents.

## De la Índia a Occident: el paper de l'Islam

Ometré tota discussió sobre la ciència dels indis, ..., dels seus subtils descobriments en astronomia, descobriments que són més enginyosos que aquells dels grecs i els babilonis, i dels seus valuosos mètodes de càlcul que superen tota descripció. Solament diria que aquests càlculs s'efectuen per mitjà de nou signes. Si aquells que creuen que, perquè parlen grec, han arribat als confins de la ciència, llegissin els textos indis, es convencerien, encara que una mica tard, que hi ha altres persones que també saben coses de valor.

Severus Sebokht (662 n.e.)

Aquest text és la primera referència a la numeració hindú que es coneix. Cal saber que Severus Sebokht era un bisbe nestorià originari de Keneshra, a la part alta de

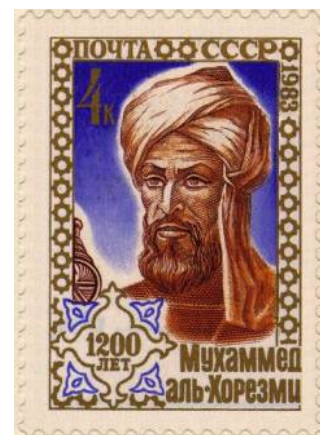
l'Éufrates i que, segurament, estava interessat en els coneixements astronòmics hindús per tal de calcular correctament la data de la Pasqua cristiana. Amb ell sabem que al segle VII les xifres hindús s'estaven estenent cap a l'oest, en zones que posteriorment caurien sota el domini àrab. Documents ja citats, com la inscripció de Trapeang Prei, ens informaven de la seva difusió cap al sud-est.

El segon document escrit salta a mitjans del segle X. Es tracta del llibre *Kitab al-fusul fi al-hisab al-Hindi* (El llibre de capítols sobre l'aritmètica índia) escrit per Abul Hassan al-Uqlidisi. En ell es destaca el caràcter pràctic de la numeració hindú. En aquells temps al món àrab coexistien diferents sistemes numèrics: els comerciants feien servir un sistema de comptatge i càlcul basat en l'oralitat i l'ús dels dits; a nivell culte es feia servir la base sexagesimal heretada de Mesopotàmia pels càlculs astronòmics; també sabem de l'ús estès d'una numeració alfabètica. Els càlculs amb la numeració hindú es feien, inicialment, sobre taulers de pols o sorra que farien la funció de les nostres pissarres escolars. Això permetia esborrar resultats parcials a mesura que s'anava treballant (la qual cosa, per contra, no permetia revisar els resultats). Tot i així, com hem dit anteriorment, els canvis costen. A un escrit del segle X d'As-Suli es diu:

Els escribes oficials no obstant això eviten usar [el sistema indi] perquè requereix equipament [com un tauler de pols] i ells consideren que un sistema que no necessita res excepte els membres del cos, és més segur i més apropiat a la dignitat d'un líder.

L'acceptació al món àrab de la numeració índia no va ser tan ràpida i fàcil com sovint es pensa. Al llibre d'Ibrah (1997: 1253 a 1259) s'hi exposen molts altres exemples. Un dels que paga la pena comentar, tot i que certament anecdòtic, és el del sentit de l'escriptura. És de coneixement general que l'escriptura àrab té el sentit dreta-esquerra. Els nombres en canvi no, ja que els escribes àrabs van mantenir la forma d'escriptura original índia, d'esquerra a dreta. Són d'imaginar les petites dificultats d'ordre pràctic que comporta incrustar fragments escrits amb un canvi direccional.

Dels documents existents podem extreure informació dels que s'han perdut, perquè tenim un buit de gairebé 300 anys entre el text de Severus Sebokht i el d'Al-Uqlidisi. Per exemple, gràcies a traduccions llatines posteriors i cites a molts altres llibres tenim coneixement d'un títol cabdal per la transmissió del sistema indi de numeració i que va influir tan al món àrab com, posteriorment, a Europa. Es tracta del llibre *Kitāb al jāmī' wa'l taf īiq bī hisāb al hind* (Llibre de l'addició i la sostracció segons els càlculs dels indis). El seu autor va ser **Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi** (Bagdag 783, ~850).



No existeix cap còpia de l'original àrab. El títol d'una de la primera traducció llatina coneguda, feta per l'anglès Adelard de Bath és *Algoritmi de numero indorum* i data del 1130. Una altra obra molt influenciada per l'original àrab sembla ser el *Liber algorismi de practica arismetica* del traductor (sembla que d'origen jueu) Juan de Sevilla (Juan Hispanus o Juan Hispalenses) que va viure entre el 1135 i el 1153.

No està tan documentada com en el món culte la influència dels comerciants en la transmissió de la numeració hindú. A l'autobiografia Abū 'Alī al-Husayn ibn 'Abd Allāh ibn Sīnā (980 – 1037) conegut a occident com Avicena, explica com uns missioners provinents de l'Egipte li van ensenyar a la ciutat de Bukhara la numeració hindú (sabem que entre el port d'Alexandria i la Índia hi havia excel·lents relacions comercials) encara que una altra versió de la història explica que Avicena va apren-

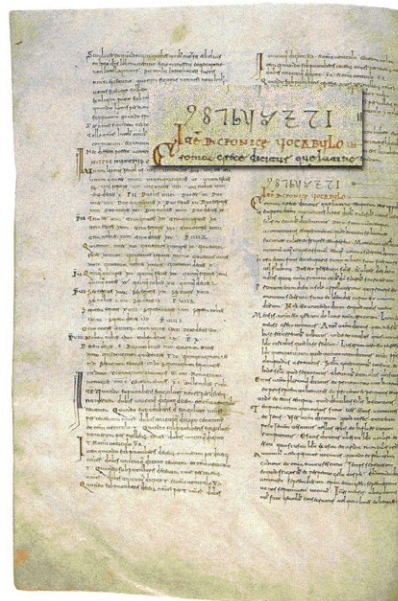


dre la numeració hindú d'un venedor d'hortalisses. També és destacable la intensa tasca realitzada pels comerciants jueus fins i tot entre l'Islam oriental i l'occidental, la qual cosa crearia un nou canal de transmissió dels nombres indis.

En tot cas, el que sabem del cert és que tant per via culta com per via comercial els antics àrabs són els que va influenciar en l'arribada i acceptació, no sense resistències, dels nombres hindús a Europa i Occident en general. De tal manera que aquests nombres se'ls va conèixer durant molt de temps com *nombres àrabs*. Només des d'èpoques més recents hem començat a anomenar-los *indo-àrabs*.

Els dos canals d'entrada fonamentals van ser la península ibèrica, ocupada amb fronteres variables pels àrabs durant vuit segles, i Itàlia des de Sicília. El primer text europeu on trobem una referència a aquests nombres és al *Còdex Vigilanus*, un manuscrit de l'any 976 on hi apareixen les nou xifres<sup>16</sup> amb un aspecte molt semblant a l'actual. Està escrit pel monjo Vigila al monestir d'Albelda (La Rioja). L'autor del *Còdex* escriu el següent comentari:

"I també a propòsit de les xifres de l'aritmètica, és necessari saber que els indis posseeixen una intel·ligència extremadament subtil, i que els altres nacions els cedeixen el pas en el que concerneix a l'aritmètica, la geometria i altres disciplines liberals. Això es posa de manifest de la millor manera en les nou xifres a través de les quals expressen cada grau de no importa quin nivell."



Cal destacar també el paper jugat per Gerbert d'Aurillac (~938-1003), posteriorment nomenat Papa amb el nom de Silvestre II, i autor de *Regulae de numerorum abaci rationabibus* on descriu un àbac inventat per ell on a les fitxes, de l'1 al 9, estaven escrites els nombres àrabs. Segurament va conèixer aquesta numeració durant la seva estada al Monestir de Santa Maria de Ripoll.



Però el títol que, segurament, més influència va tenir en la introducció dels nombres àrabs a Europa va ser el *Liber abaci* de Leonardo da Pisa (Fibonacci) publicat al 1202. Fibonacci reconeix haver après els nombres hindús a Bugia (Algèria) on el seu pare ocupava un càrrec a la duana. A l'inici del primer capítol escriu:

"Les nou figures dels hindús són 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Amb aquestes nou, i amb el símbol 0, que els àrabs anomenen *zèphirum*, poden escriure's tots els nombres, com demostrarem a baix."

<sup>16</sup> Moltes de les referències als nombres hindús, tant al texts àrabs com als europeus parlen només de "les nou xifres", exclouent sovint el zero, desconegut o considerat un nombre estrany.



Només a Itàlia es coneixen uns 300 llibres, anteriors al 1500, més o menys deutors del *Liber Abaci* i que alligonaven en pràctiques bàsiques d'aritmètica mercantil<sup>17</sup>. De França en coneixem una trentena. És el comerç, especialment amb orient, el motor que potencia la introducció de les xifres indo-aràbigues. Aquesta numeració permet, a la vegada, fer els càlculs i portar el registre de comptes<sup>18</sup>. A l'any 1338 Florència, una ciutat d'uns cent mil habitants, compta amb 1200 estudiants a les escoles de càlcul (Soutiff, 2001).

El primer llibre imprès a la península és la *Summa de l'art d'Aritmètica* de Francesc Santcliment, escrita i editada en català al 1482. Té el mèrit afegit de ser el segon llibre de matemàtiques imprès a Europa (i per tant al món) després de l'*Aritmetica* de Treviso (1478). Han passat més de 250 anys del *Liber Abaci* i gairebé 500 des del *Còdex Vigilanus* però encara a les primeres pàgines s'han d'explicar les xifres indo-aràbigues :

...io. car los nombres q' passen .io. no son  
fino moltes vegades vir o repetir .io. ho  
co que es contengut dins en aquell nom  
bre: enaxi no son fino .io. figures comu  
nes: ab les quals moltes vegades retor  
nades tot nombre se pot escriure. // Elles  
comunament se apellen chiffres mas pro  
piament se apellen figures significati  
ues les: 9. e la xena se appella cifra ho  
figura de no-res / ho altrament alguns la  
apellen zero. car no val res / mas fa va  
ler les altres segons lo lloch: en que es. p  
que es necessari: que hom ne hage una: q  
no valgue res p les xenes senceres: les  
quals nos poden scriure sens aquella. les  
quals .io. chiffres se fan en tal manera.  
.i. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.  
De les quals la primera començant ala  
ma finestra val .i. la segona. 2. la terça. 3  
la quarta. 4. la cinquena. 5. e an des  
altres entrò ala xena: que no val res.  
Item has de saber: que per nombrar no  
tenim fino. 5. nombres generals: que se  
nomenen simple xena centenar. Es veri  
tar: que alguns diuen nombre xena cente

"Nombrar és lo nombre preposat en algunes figures co  
munes, de paraula perceptiblement exprimir. Altrament  
nombrar és lo nombre en l'enteniment concebut, per figu  
res comunes visiblement representar. I has de saber que  
no són més que 10 xifres. Car així com lo nombre de 10  
és lo primer nombre complit, lo qual conté en si tots los  
nombres que passen 10 ../. en així no són sinó 10 figures  
comunes, amb les quals moltes vegades retornades tot  
nombre se pot escriure. Elles comunament s'apel·len xi  
fres; més pròpiament s'apel·len figures significatives les 9  
i la desena s'apel·la xifra o figura del no-res. O, altra  
ment, alguns apel·len zero, car no val res, mes fa valer  
les altres segons lo lloc en què és. Perquè és necessari  
que hom n'haja una que no valga res per les desenes  
senceres, les quals no es poden escriure sens aquella. Les  
quals 10 xifres se fan de tal manera:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

De les quals la primera començant a la mà sinistra val 1,  
la segona 2, la terça 3, la quarta 4, la cinquena 5, i així  
les altres entrò a la desena, que no val res. Item has de  
saber que per nombrar no tenim sinó tres nombres gene  
rals, que s'anomenen simple, desena, centenar"

Francesc Santcliment (1998, pàgines III i IV de l'original)

El fet de que al propi text es facin servir xifres indo-aràbigues (quan es diu "10 xifres" o "figures significatives les 9") fa pensar que ja eren força conegudes encara que no àmpliament utilitzades. Cal observar, per exemple, que l'1 encara no té un tipografia pròpia sinó que es representa amb una lletra «i». Una altra pista sobre el coneixement incomplet de les xifres indo-aràbigues és que al capítol dedicat a la resta dedica un parell de pàgines a explicar com distingir el nombre més gran del petit (la resta amb resultat negatiu no s'acceptava).

En conjunt es pot afirmar que són els segles XV i XVI on es generalitza l'ús de les xifres que ja podem anomenar "modernes". Més o menys uns 600 anys després del *Còdex Vigilanus*.

<sup>17</sup> CAUNEDO DEL POTRO, BETSABÉ (2003): *De Arismetica: Un manual de aritmética para mercaderes*. Cuad. Hist. Esp. [online]: [http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S0325-11952003000100002&script=sci\\_arttext&tlng=es](http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S0325-11952003000100002&script=sci_arttext&tlng=es)

<sup>18</sup> HUSSING, HANS (1998): *Lecciones de historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid

"L'escriptura numèrica amb xifres indo-aràbigues va topar amb una doble oposició; una de tipus social i una altra pròpiament matemàtica. Al començament, la mil·lenària tradició del càlcul amb àbac actuava com a fre. Alguns representants de l'Església van rebutjar les xifres per procedir d'un ambient cultural no cristià, qualificant-les de *paganas* o fins i tot d'*obra del diable*; això va portar, per exemple, a la seva prohibició a Florència al 1299. A més aquestes xifres oferien millors possibilitats per a la falsificació, per exemple, a la teneduria de llibres, on sí que s'utilitzaven les xifres romanes."

Hans Wussing<sup>19</sup>

Si pot sorprendre que, tal com es menciona al text, es prohibís directament l'ús dels nombre indo-aràbics, afegirem que al segle XV també es va fer una prohibició idèntica als funcionaris de l'Ajuntament de Franckfurt.

Farem un últim apunt que destacarà la importància de la transmissió àrab de les xifres hindús. Aquest apunt es refereix a la introducció de determinades paraules al nostre vocabulari:

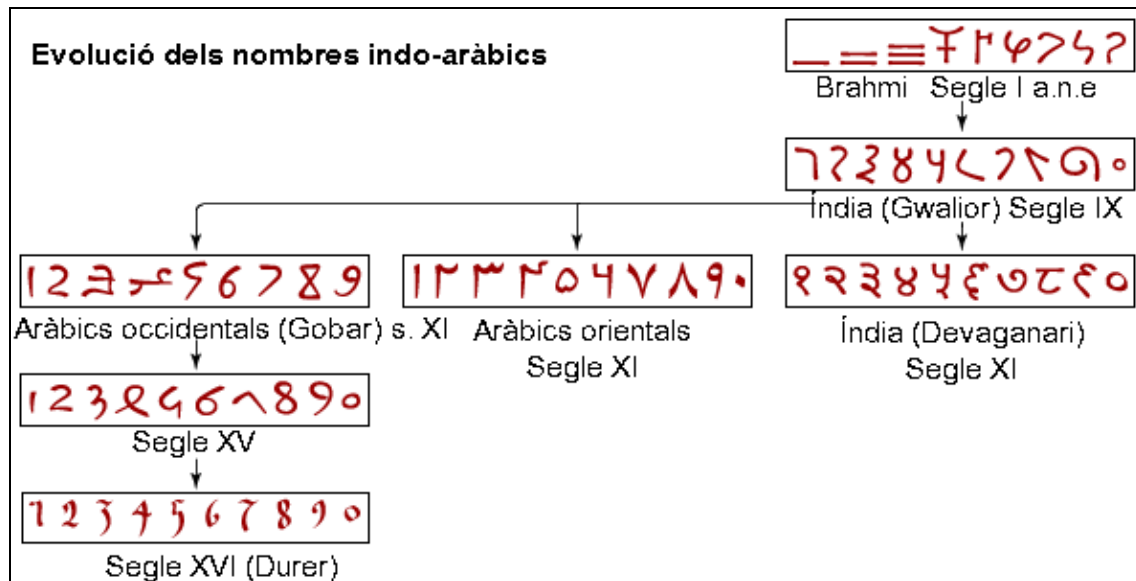
- **algorisme:** la paraula que ha donat nom a les instruccions per fer una operació aritmètica, un procediment de càlcul (en una definició ajustada al que s'entenia en aquesta època i que s'ha modificat àmpliament a l'actualitat) prové del nom del matemàtic Al-Khwarizmi.
- **guarisme:** un dels noms amb que es coneixen els signes numèrics també prové del nom del mateix matemàtic.
- **xifra:** prové del mot àrab *sifr* que, a la vegada és la traducció de l'hindú *Śhunya*, "buit". Per tant és el nom del zero àrab. És curiós que el nom del símbol més especial de la numeració indo-aràbiga, el que li dona el seu especial potencial de càlcul sigui el que hagi acabat designant a tot el conjunt de signes. Actualment es fa servir també sovint la paraula *dígit*, adaptada del corresponent nom per les xifres dels països de parla anglesa: *digit* (de clara referència a l'ús dels dits per comptar).
- **zero:** l'adaptació dels *sifr* àrab feta per Leonardo da Pisa al seu *Liber abaci* va ser *zèphirum*, el nom d'un vent. Es pot suposar que per la seva semblança fonètica o per motius més poètics (buit-aire). Aquest mot va derivar en *zèvero* i, finalment, en *zero*.

Alguns d'aquests noms van trigar en ser adoptats. El nom d'*algorisme* el veiem des dels primers títols publicats sobre els nombres aràbics però a la *Summa* de Santcliment, ja del segle XV, el nom del zero encara no s'utilitza i l'anomena *xifra*, mentre que als guarismes els anomena *figures*.

## L'evolució de l'escriptura de les xifres

Són molts els models de grafies que trobem a la Índia al llarg de la història i no farem cap estudi detingut. Però si és interessant fer-se, com a mínim, una idea global de com han derivat fins a prendre les formes de dues de les numeracions que més es fan servir a l'actualitat: l'àrab i la que podríem anomenar *moderna internacional*.

<sup>19</sup> HUSSING, HANS (1998): *Lecciones de historia de las Matemáticas*. Siglo XXI. Madrid. Pàgina 106.

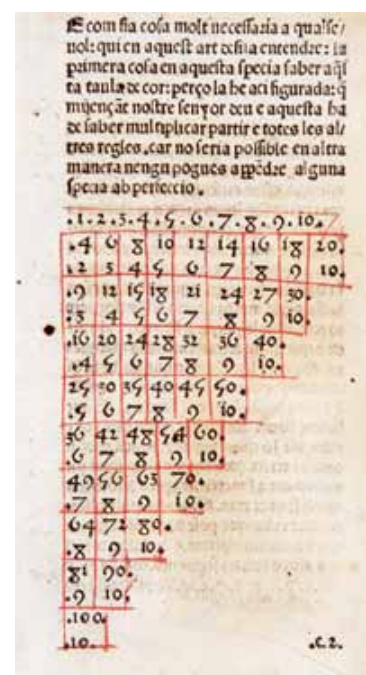
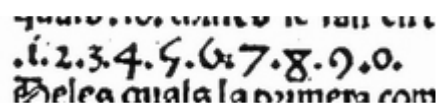


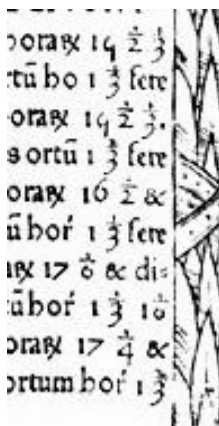
Les grafies es deformen, sobre tot, pels materials que es fan servir per escriure, tan per l'estri amb el que s'escriu com el suport sobre el que es fa. Així, per exemple, sabem que els escribes àrabs, que escrivien sobre rotlles de paper o pergamí i en sentit dreta-esquerra, giraven 90° el rotllo, amb la qual cosa les grafies del 2 i el 3, molt clarament, també es van girar 90°. Podem veure com el nostre 2 i el nostre 3 guarden molta més semblança amb les xifres àrabs de les que ens adonem a primer cop d'ull si els girem convenientment.



A occident les xifres també van patir grans canvis. Però l'escriptura es va començar a estabilitzar amb el desenvolupament tècnic de la impremta i el disseny de tipografies amb cada vegada més elements semblants.

Així, per exemple, hem vist que a la Summa de Santcliment l'u es representava amb una i però també podem veure que el cinc encara no té la forma molt definida i s'assembla molt al nostre 4 manuscrit. El sis i el nou tampoc encara s'acaben de tancar del tot.









A Alemanya, a un llibre del mateix any (*Cosmografia* de la impremta de Léonard Holle), trobem, en canvi, que l'1 té tipografia pròpia. El 6 també es veu més tancat que a la de Santcliment. En canvi el 5 encara no està format. Per exemple, a la primera línia ens pot semblar veure un 14 quan en realitat és un 15.

Es pot observar com l'1 del numerador de les fraccions queda reduït, pràcticament a un punt.

El disseny tipogràfic va continuar evolucionant intentant equilibrar les altures absolutes (del signe) i relatives (alineació amb els altres signes), la facilitat de lectura... fins arribar a les formes estandarditzades. Una de les primeres tipografies ja semblants a l'actual és la creada pel francès Claude Garamond al voltant del 1540. És curiós observar com la mida del zero, l'u i dels dos és més petita que la de les altres xifres i com varien les alineacions dels tipus, unes vegades inferiors (3,4,5,7,9) i altres superiors (6,8).

O I 2 3 4 5 6 7 8 9

Els disseny de les xifres s'ha anat modificant segons els gustos del lloc i de l'època. Com a curiositat podem comparar el vuit Garamond antic amb un altre de més modern. A l'antic la part superior sembla més gran que la inferior però, en realitat, són iguals, com es pot observar si el girem. Per compensar aquest efecte visual posteriorment la part inferior es va fer més gran, com es veu molt més clarament si el girem.

			
Dret	Invertit	Dret	Invertit
<b>Garamond antic</b>		<b>Garamond modern</b>	

Com al cas de les lletres, en alguns nombres la grafia manuscrita s'ha diferenciat clarament de la impresa. En el cas de la manuscrita la forma del quatre és clarament diferent, al set se li acostuma a afegir un guió per evitar la confusió amb l'u i al nou se li fa més recta la part inferior.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

## La base deu no és el déu de les bases

Si es revisen les diferents numeracions utilitzades al món trobarem que la "base reina", la que apareix amb més freqüència, és la base 10. L'explicació és clarament antropomòrfica: els deu dits de les dues mans, els primers estris per comptar que segurament es van fer servir i que, molt probablement també, varem fer servir nosaltres mateixos quan apreníem a comptar. Això explicaria també l'omnipresència de la base 5 com a principal o auxiliar. A les numeracions que hem vist fins ara també hem trobat les bases 20 i 60 en les numeracions maia i les dues mesopotàmiques. L'origen de la base 20 torna a ser antropomòrfic: ve de l'ampliació del comptatge a l'ús dels dits dels peus. El de la base 60 no el sabem encara del cert i hi ha diferents hipòtesis al respecte. Hi tornarem més tard.

Si ampliem la revisió de les numeracions al camp de les orals, les parlades, i observem de nou la forma de construir els numerals, veurem que apareixen altres bases. Probablement son vestigis de formes numerals que es feien servir antigament i després van ser substituïdes en el camp escrit (i posteriorment en el parlat) per la base deu<sup>20</sup>. Observem alguns casos:

- **base 2 (binària)**: un cas que hem vist anteriorment és el de *gumulgal* australians però hi ha més casos. Un altre de documentat és el la llengua dels indis del Brasil *bakairi*.

	<b>gumulgal</b>	<b>bakairi</b>	<b>Càlcul</b>
<b>1</b>	urapon	tokale	
<b>2</b>	ukasar	ahage	
<b>3</b>	ukasar-urapon	ahage tokale	2+1
<b>4</b>	ukasar-ukasar	ahage ahage	2+2

- **base 4 (quaternària)**

Quan s'ha parlat dels numerals hem donat l'exemple dels *Enga* que comptaven fins a 60 en 15 cicles de quatre. Sabem que els indis *yuki* (Gardner, 1984), feien servir per comptar els forats entre els dits i, per tant feien servir una base quatre. Un altre origen possible és el de comptar assenyalant-se amb el polze les puntes dels dits. També estan documentats alguns casos a Oceania (no arriba, però, a la dotzena de llengües). Per exemple el dels *Wiru*<sup>21</sup> (1, 2, 3, 4; 5 = (4+1), 6 = (4+2), 8 = (2·4).

<sup>20</sup> Val a dir que en les numeracions orals sovint es parla de *cicles* més que de *base* ja que és a la numeració escrita on la base hi juga un paper del tot regular, amb signes o "passos de lloc" per cadascuna de les potències les seves potències, mentre que als sistemes orals, aquests canvis es produeixen per alguns múltiples de la base que no sempre són potències. Per exemple hi ha numeracions de "cicle 5-20" que introdueixen una paraula nova per cada múltiple de 5 fins a 20 i, a partir d'aquí construeixen la resta dels numerals. Nosaltres continuarem aplicant el terme base, però amb aquestes matisacions que acabem de fer.

<sup>21</sup> PHYTHIAN, J.E. (1992): *Counting systems of papua New Guinea*  
[www.science.uts.edu.au/msc/Language.pdf](http://www.science.uts.edu.au/msc/Language.pdf)

Wiru					
1	2	4	5	6	8
ondene	takura	lu-u	lu ke ondene	lu ke takura	lu-u takura
			4+1	4+2	2·4

• **base 5 (quinària)**

És força més freqüent i la trobem arreu del món. L'hem vista com a base auxiliar a les numeracions maia, grega acrofònica i romana. Apareix a moltes llengües. Només a la zona d'Oceania s'han comptat més de 300 maneres diferents basades en el cicle de 5<sup>22</sup>. Un exemple pot ser els dels *Alamblak* de Papua-Nova Guinea, un altre el de la llengua *Nahuatl* de Mèxic

	alamblak	Càlcul	nahuatl	Càlcul
1	rpat		cë	
3	hosfirpat	(2+1)	ëyi	
5	tir yohtt	5 "exacte"	chica o mäcuilli	
6	tir yohtti rpat	5+1	chicuacë	5+1
8	tir yohtti hosfirpat	5+3	chicuëyi	5+3

Moltes de les bases auxiliars es veuen a la vida diària en els sistemes monetaris, on els valors les monedes i bitllets juguen un important paper "d'empaquetador de quantitats". Al nostre país, abans de l'aparició de l'euro, el *duro* (5 ptes) va jugar un paper molt important, fins al punt que molta gent gran (i no tan gran entre la d'ètnia gitana) comptaven en duros, per tant en certa forma, en base cinc.

- **base 6 (senària):** la tribu africana dels *bulanda* diuen al 7, "sis més un", al 8, "sis més dos". També trobem un cas semblant a la llengua dels *Ndom* de Nova-Guinea.

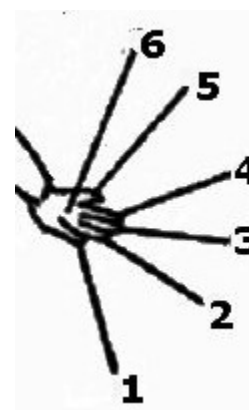
Ndom						
1	2	3	6	7	8	14
sas	thef	ithin	mer	mer abo sas	mer abo thef	mer an thef abo thef
				6+1	6+2	6·2+2

Aquest cas té d'especial que també té noms propis per construir els numerals per dos múltiples de 6: el 18 i el 36

Ndom					
6	18	36	43	85	98
mer	tondor	nif	nif abo mer abo sas	nif thef abo mer an thef abo sas	nif thef abo tondor abo mer abo thef
			36+6+1	36·2+6·2+1	36·2+18+6+2

<sup>22</sup> Del mateix article anterior. Sobre la gran varietat de sistemes de comptatge a la Zona d'Oceania i Nova Guinea es pot consultar la pàgina web GLEC (<http://www.uog.ac.pg/glec/>)

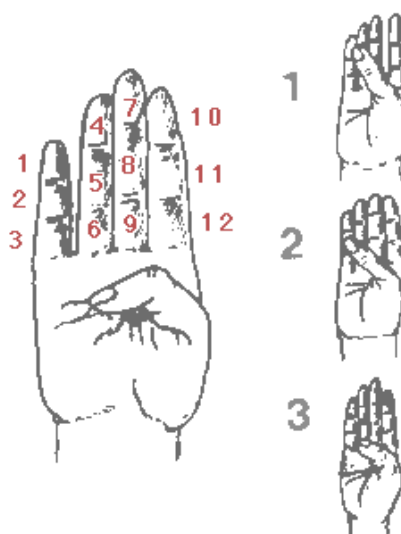
Es fa difícil imaginar l'origen de la base 6. Un de possible és assenyalar-se amb el polze un a un els forats entre els altres 4 dits de totes dues mans. Un altre seria comptar els cinc dits i afegir un gest completant la mà, per exemple assenyalant-se el palmell. Encara una tercera teoria apuntaria a un comptatge per mitges dotzenes, ja que el 12, com veurem, sí que és fàcilment comptable a la mà.



### • base 12 (duodecimal)

La base 12 és molt usual encara al nostre entorn. Estem molt acostumats a trobar determinats productes empaquetats per dotzenes o mitges dotzenes (ous, tot el que es relaciona amb la taula com coberteries, vaixelles o tovallons...). També tenim múltiples i submúltiples com la *grossa* que està feta de 12 dotzenes o l'*unça* que és 1/12 de lliura. Moltes monedes, ja des de l'Edat Mitjana, es dividien en altres 12 de més petites. Per exemple al segle XII a Catalunya i Aragó un *sou* eren 12 *diners*. La raó, en aquest cas, és clara ja que 12 té quatre divisors exactes (2,3,4 i 6) mentre que 10 només en té dos (2 i 5). També ens seria útil en les subdivisions de mesures angulars i de temps en les que fem servir la base 60, essent 12 un dels seus divisors. Tornem a trobar el 12 a múltiples calendaris, amb l'any solar dividits en 12 mesos; per exemple en els signes del zodíac. El mateix horòscop xinès, compren cicles de 12 anys.

La base 12 pot tenir un origen antropomòrfic clar comptant amb les falanges de 4 dits d'una mà assenyalant-se-les successivament amb el polze.



Un exemple de numeració en base 12 és la de la llengua *Nímbia* (Nigèria) que té numerals especials pels nombres de l'u al dotze i després es segueix construint amb un sistema additiu-multiplicatiu:

Nímbia						
1	3	8	12	15	44	99
da	ugu	tager	tuni (gume)	tuni mbe ugu	gume ugu ni tager	gume tager ni ugu
				12+3	12·3+8	12·8+3



### • base 15

És molt inusual. Una possible explicació antropomòrfica seria comptar utilitzant una mà per assenyalar els dits de l'altra mà i dels dos peus. Un altre explicació pot ser la d'alguna forma de comptar assenyalant parts del cos en un cicle tancat de 15 indicacions. Hi ha una cas a Nova-Guinea en la llengua *huli* amb noms especials pels numerals de l'1 al 15.

Huli						
2	6	13	15	21	43	92
kira	waragaria	haleria	nguira	nguira-ni waragaria	ngui ki, ngui te-bone-gonaga haleria	ngui wara-ga, ngui kane-gonaga kira
				quinze objectes i sis objectes	quinze dos tretze objectes del tercer quinze	quinze sis, dos objectes del setè quinze
				15+6	15·2+13	15·6+2

### • base 20

Després de la base deu és la més trobada. L'hem vista a la numeració maia i també es pot observar a la numeració escrita asteca. A les numeracions orals també està molt present, fins i tot encara ho és residualment a moltes llengües europees. Un dels casos més especials i propers és el de l'euskera que la fa servir d'una manera sistemàtica en els numerals de l'1 al 100

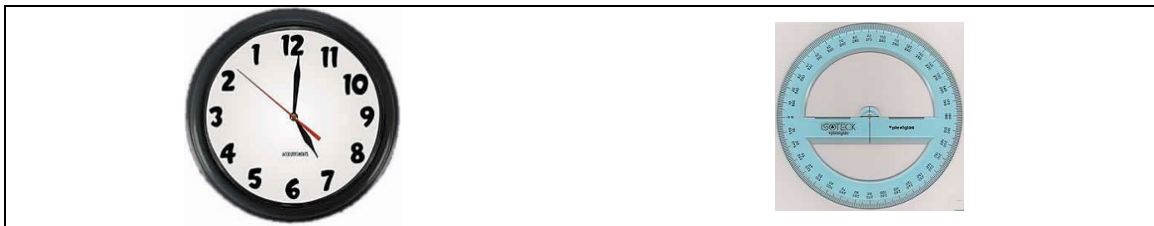
Euskera		
10	hamar	
20	hogeï	
35	hogeï ta hamabost	20+(10+5)
48	berrogeï ta zortzi	2·20+8
85	larrogeï ta bost	4·20+5
98	larrogeï ta hemezortzi	4·20+18

Observem rastres de la base vint a altres llengües europees

Llengua	Nombre	Numeral	Construcció
Francès	97	quatre-vingt-dix-sept	4·20+10+7
Gal·lès tradicional	68	wyth a thrigain	8+3·20
Georgià	71	samotsdatertmet'i	3·20 i 1 més de 10
Danès	57	syvoghalvtreds	7 i 2½ vegades 20
Gaèlic d'Escòcia	87	ceithir fhichead is a seachd	4·20+7
Manx (Illa de Man)	63	tree feed as tree	3·20+3

- **base 60 (sexagesimal)**

Només s'ha trobat completa a les numeracions de Mesopotàmia, tal com hem vist a les numeracions escrites sumèria i babilònica erudita. Però l'hem heretada d'ells en el sistema horari i en el de les mesures angulars. Els grans coneixements astronòmics de l'antiga Mesopotàmia van traspasar les seves fronteres i, normalment, es conservava la seva base per la confecció de les noves taules d'observació dels moviments dels astres. Grecs i àrabs així ho van fer i per nosaltres és relativament fàcil comptar nombres petits en base 60 ja que només hem de fer un traducció a "hores i minuts". És difícil saber l'origen d'aquesta base. Algunes teories apunten justament a un origen astronòmic: el nombre amb més divisors prop del 365 dies de l'any és 360 i 60 és un dels seus divisors que, a la vegada en torna a tenir-ne molts (2-3-4-5-6-10-15-20-30). Ifrah (1997) aposta més per una hipòtesi antropomòrfica. Si tenim en compte el sistema de comptar dotzenes amb una mà assenyalant-se les falanges amb el polze i observem que podem comptar fins a cinc dotzenes amb els dits de l'altra mà obtenim que  $5 \cdot 12 = 60$ .

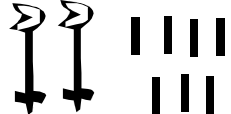





## Classifiquem les numeracions escrites

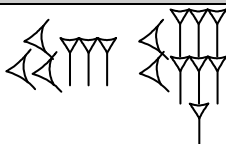



Hem vist prou numeracions escrites com per intentar classificar-les. Ifrah (1997) proposa tres grans grups amb subgrups (que ell anomena *espècies*). Observem primer els grans grups:

- **additives:** cada xifra té un valor propi, independentment del lloc on s'escriguin. Els nombres es construeixen bàsicament per una addició dels valors de les xifres representades. A aquest grup pertanyen les numeracions sumèria, l'egípcia, la romana, la grega acrofònica i l'alfabètica.
- **híbrides:** s'aplica un principi mixt que fa ús del producte i l'addició. En general els múltiples de les potències de la base venen expressats amb aquesta regla multiplicativa. La numeració xinesa tradicional i la maia calendàrica són dos exemples de numeració híbrida.
- **posicionals:** el valor de cada xifra depèn del lloc que ocupa en l'escriptura del nombre. Només hi hagut quatre a la història i les hem vistes totes quatre: la babilònica erudita, la xinesa de varetes, la maia i la hindú. El nostre sistema modern d'escriptura numèrica ho és ja que és hereu de la hindú.

A cada grup de numeracions Ifrah defineix un subgrup que no observarem de forma exhaustiva.

Numeracions additives			
Tipus	Característiques	Exemple (2007)	Altres numeracions
1a espècie	Tenim un signe per a cada potència de la base.	Egípcia  $1000+1000+1+1+1+1+1+1$	Cretenca, hitita, as-teca, protoelamita
2a espècie	És com l'anterior però a més hi ha un divisor de la base que serveix per agrupar una petita quantitat de signes.	Sumèria  $600+600+600+60+60+60+10+10+1+1+1+1+1+1+1+1$	Romana
		Grega acrofònica  $1000+1000+5+1+1$	
3a espècie	Hi ha signes específics per cada ordre d'unitats (per a cada unitat, per a cada desena, per a cada centena...).	Grega alfabètica 'BZ $(2000)+7$	Egípcies (demòtica i hieràtica), hebrea, àrab alfabètica...

Numeracions híbrides			
Tipus	Característiques	Exemple	(2354)
1a a 4a espècies	Combinen principis additius i multiplicatius amb diferents tipus d'irregularitats (representar additivament les xifres de l'1 al 9, utilitzar símbols especials per les desenes...).	1a) assiri-babilònica	$(1+1) \cdot 1000 + (1+1+1) \cdot 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1$
		2a) cingalesa	$2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 50 + 4$
		3a) mariota abreujada	$(10+10+1+1+1) \cdot 100 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1$
		4a) etiop	$20 \cdot 100 + 3 \cdot 100 + 50 + 9$
Tipus	Característiques	Exemple (2007)	Altres numeracions
5a espècie	Tenen signes de l'1 al 9 i per cadascuna de les potències de la base. Els signes d'unitats davant dels de les potències multipliquen el seu valor evitant la repetició.	Xinesa tradicional 	Tamil, malaia

Numeracions posicionals			
Tipus	Característiques	Exemple (2007)	Altres numeracions
1a espècie	Cada lloc on s'escriuran les xifres representa una potència de la base. Tenen dues xifres, la primera representa la unitat i la segona un divisor de la base. Aquestes dues unitats es combinen additivament a cada posició.	Babilònica erudita  $[(10+10+10+1+1+1);(10+10+1+1+1+1+1+1)]$	
		Xinesa de varetes  $[2; ; ; 7]$	
		Maia  $[5;(5+5);7]$	
2a espècie	Hi ha signes per específics cada unitat de 1r ordre (u, dos, tres... fins a nou). A cada lloc s'escriurà la xifra corresponent a la quantitat d'unitats d'aquell ordre.	Hindú (Gwalior) 	Aràbiga, moderna

A l'annex final d'aquest capítol es poden trobar fitxes resum d'aquestes i alguna altra numeració més.

## Numeracions figurades

Denis Guedj (1998) en fa una divisió més genèrica de les numeracions. En parla de les:

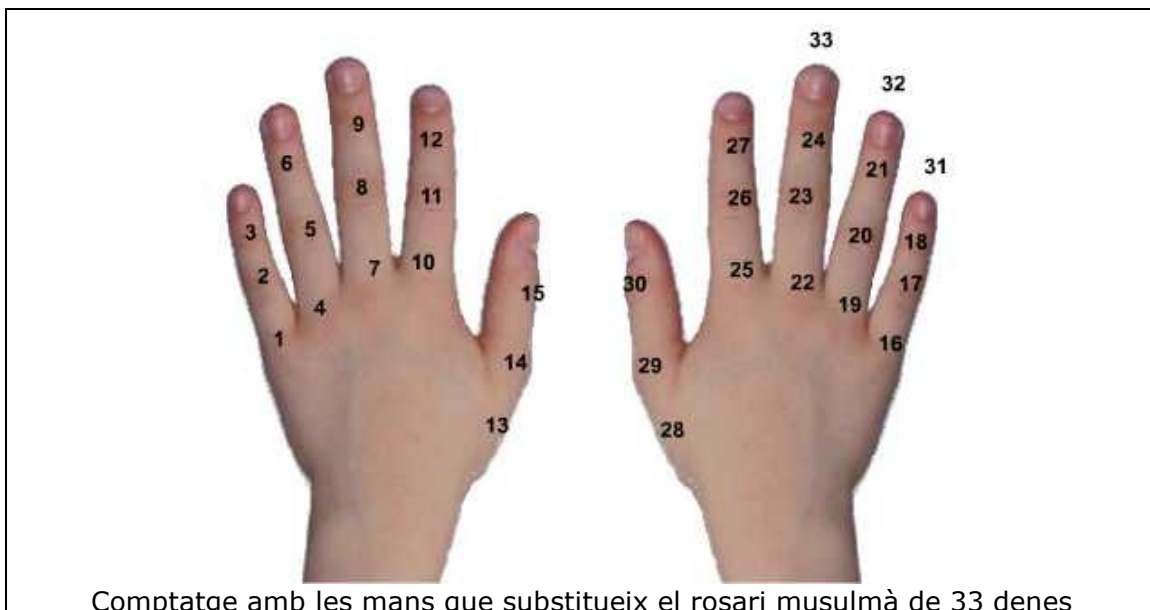
- **numeracions figurades:** cada nombre és representat per un signe físic (osques, objectes, cordes amb nusos...).
- **numeracions parlades:** és el sistema de denominació dels nombres, el que hem anomenat numerals.
- **numeracions escrites:** tenen "xifres", signes numerals per representar els nombres.

De les dues darreres ens hem ocupat àmpliament i de les primeres fragmentàriament. Hem parlat del servei les marques a les talles com a mètode per establir correspondències i fer o comprovar censos. També els *càlculi* mesopotàmics entrarien en aquest tipus de numeracions. Però mereixen una atenció especial els sistemes d'indicar nombres amb les mans i les cordes amb nusos, sobre tot les cordes inkes que constituïen, a la seva manera, tot un sistema de numeració quasi-escrita.

## El llenguatge de les mans

Si els dits i les mans han estat el suport principal del comptatge no és estrany que també s'hagin fet servir també com un sistema de representació numèrica. Tot i que aquesta "escriptura" no pot tenir caràcter de registre ja que no és permanent. Serveix només per comptar o indicar nombres momentàniament.

Són moltes les formes en que les mans es fan servir per comptar nombres especials, per exemple els relacionats amb quantitats d'utilitat religiosa.



Comptatge amb les mans que substitueix el rosari musulmà de 33 denes

Però el que ens interessa aquí no són els mètodes de comptar que han existit sinó els de representació numèrica. I, pel que sabem, mètodes d'aquest estil s'han fet

servir arreu i a tots els temps. Ifrah (1997) ha fet tot un rastreig de texts antics on es poden trobar referències directes o indirectes a aquests sistemes i els fa remuntar a l'antic Egipte.



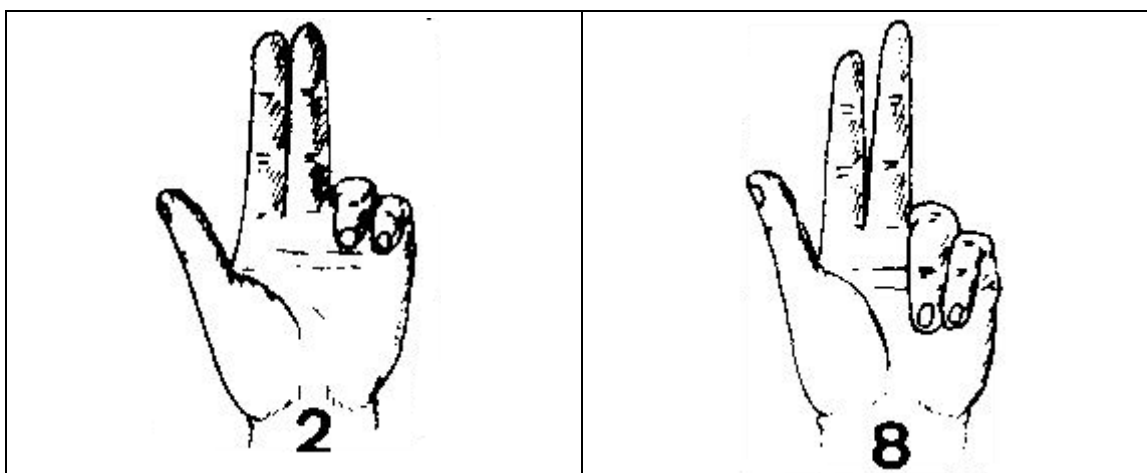
*Beda Venerabilis*

Un dels mètodes més antics, i el que més ha perdurat, el trobem descrit i ampliat en quant a la possibilitat d'escriptura de nombres al llibre de Beda el Venerable (673-735) *De ratione temporum* (Sobre la divisió del temps). El seu primer capítol es titula *De computo vel loquela digitorum* (Sobre la forma de comptar i parlar mitjançant les mans) i fa una descripció detallada del mètode<sup>23</sup>. En ell va descrivint com indicar cada nombre.

Fa servir un curiós sistema que divideix cada mà en dues parts. D'aquesta manera s'aconsegueixen quatre zones que ens indicaran les unitats, les desenes, les centenes i els milers. D'aquesta forma s'aconseguiran escriure els nombres des de l'1 al 9999.



Els dits petit, anular i cor es poden plegar de dues maneres, fins a la mateixa base del dit o fins al mig del palmell de la mà. Comparem el 2 i el 8:



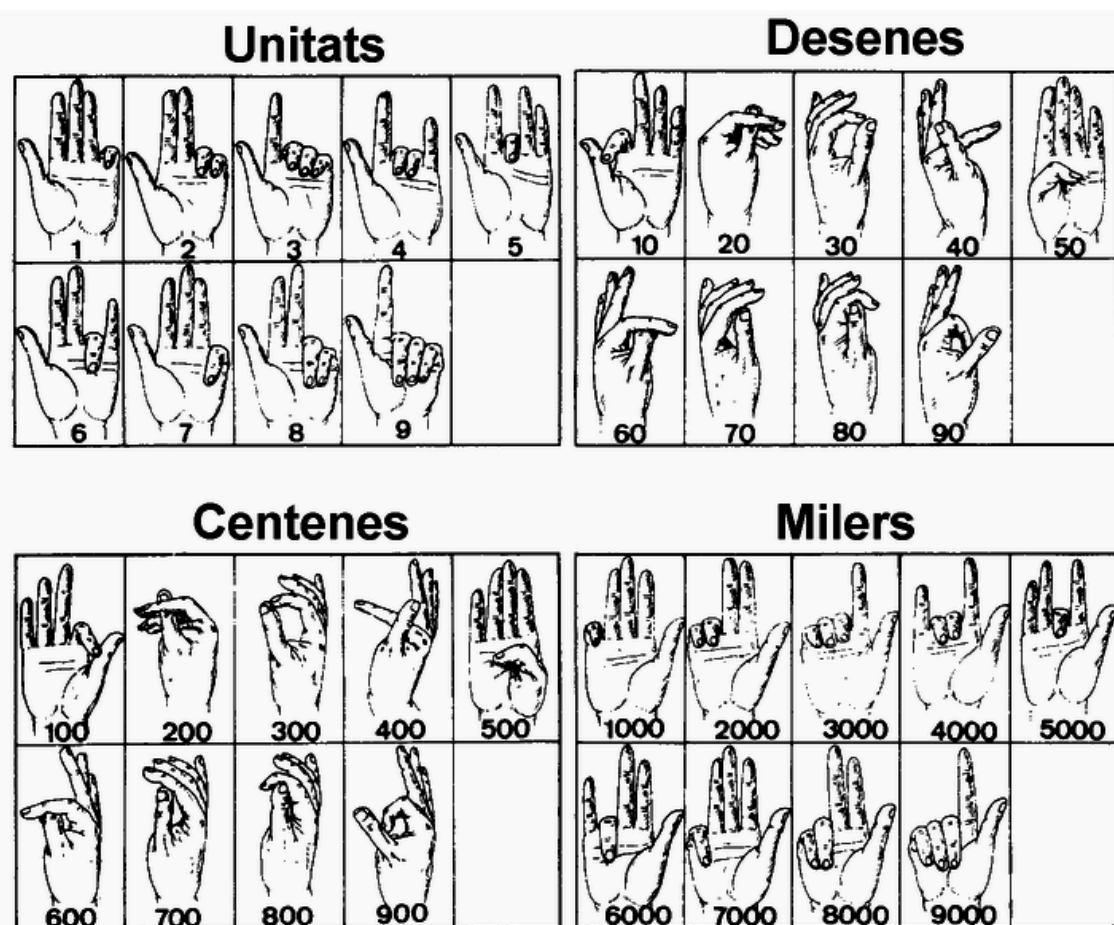
Dibuixos de G. Ifrah

<sup>23</sup> Es pot llegir una edició digital a [http://www.fh-augsburg.de/~harsch/Chronologia/Lspost08/Bede/bed\\_rat0.html](http://www.fh-augsburg.de/~harsch/Chronologia/Lspost08/Bede/bed_rat0.html)

Els dits índex i polze es sobreposen de diverses formes. Al gràfic inferior es veuen totes les posicions de cada secció de la mà. No cal dir que sense un entrenament fort, no es que costi aprendre-les, sinó que el que costa realment és posar els dits en aquestes posicions (sinó només cal intentar fer el 2). Beda descriu al seu llibre com representar cada nombre:

- Cum ergo dicis Unum, minimum in laeva digitum inflectens, in medium palmae artum infiges.
- Cum dicis Duo, secundum a minimo flexum, ibidem impones.
- Cum dicis Tria, tertium similiter adflectes.
- ...
- Quan diguis *u* doblega el dit petit esquerra i posa'l sobre l'articulació mitja del palmell.
- Quan diguis *dos*, doblega el dit següent i posa'l al mateix lloc
- Quan diguis *tres* doblega el tercer com els anteriors
- ...

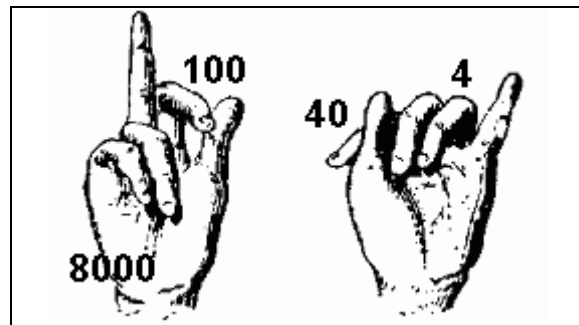
I així continua fins a explicar totes les unitats, desenes, centenes i milers



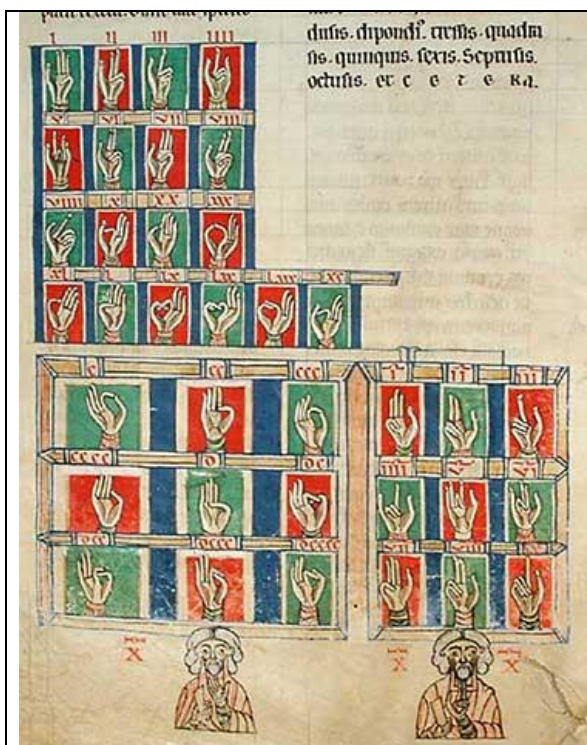
Dibuix de G. Ifrah



El nombre **8144** format amb el sistema descrit per Beda prendria aquesta forma.



Del mètode descrit per Beda es troben vestigis a moltes altres obres anteriors, però un dels mèrits de Beda és que, col·locant les mans per diferents parts del cos, explica com arribar fins al milió. També suggereix assignar ordenadament cada lletra de l'alfabet al seu nombre corresponent i fer una mena de llenguatge de sordmuts.



Còdex Alcobacense de Rabano Mauro (780-856). Permet comptar fins a 20000



Còdex matretensis (Segle XII)

En obres posteriors com la *Summa d'arichmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* de Luca Pacioli, publicada al 1494 encara es considera útil explicar aquest sistema. Fins i tot gairebé mil anys més tard es torna a trobar en un llibre d'aritmètica alemany de Jacob Leupold (que també va dissenyar alguna enginy mecànic de càlcul) *Theatrum arichmetico-geometricum* (1727).



També a l'orient es troben llibres que expliquen el mètode, com pot ser el *Farhangi Djihangari*, un diccionari persa del segle XVI.

Han existit altres mètodes, molt usats als mercats, d'indicació manual dels nombres. Especialment perquè es feien servir per tancar tractes sense que els *legos* en el sistema captessin les condicions concretes en que es feia. Fins i tot aquests tractes es feien tapant-se les mans amb mocadors per mantenir millor el secret.

A la Xina també s'han fet servir sistemes similars. Algunes de les formes digitals de representar les xifres s'inspiren vagament en la grafia de la numeració tradicional, especialment en els nombres del 6 al 10.

6	7	8	9	10
六	七	八	九	十

## Nusos: els khipus<sup>24</sup>

Representar quantitats amb nusos fets a cordes pot tenir un origen tan clar com el de les talles: un nus, un element. Un exemple el narra Herodot d'Halicarnaso (484 a.n.e. - 425 a.n.e.) al Llibre IV d'història quan escriu sobre el rei persa Darius<sup>25</sup>:

<sup>24</sup> És molt habitual trobar el nom escrit com *quipu* o *quipo*, però el Congreso Indigenista Iberoamericano de l'any 1956 va recomanar normalitzar escriptures del *quechua* i escriure *kipu* o *inka*.

<sup>25</sup> Els llibres d'Herodot es poden consultar a <http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/nuevelibros.html>

XCVIII - Havent parlat aquestes poques paraules i ordenat fer seixanta nusos en una cinta va fer portar davant seu als senyors de les ciutats de la Jònia i els hi va parlar així: «Ciudadans de Jònia, sapigheu que he tingut a bé revocar les meves primeres ordres sobre el pont; ara us ordeno que presa aquesta cinta feu el que vaig a dir-vos. Des del punt que em veiéssiu marxar contra els escites, començareu a deslligar diàriament un d'aquests nusos. Si en tot el temps que calgués per a anar-los desfent un a un, jo no comparegués, quan acabi us fareu a la vela cap a la vostra pàtria; però mentre que arribi aquest terme, ja que ho he pensat millor, us mando que conserveu sencer el pont, i poseu en el seu defensa i custòdia tota la vostra atenció, doncs en això em donaré per molt bé servit i satisfet.» Donades aquestes ordres, va emprendre Darius la seva marxa cap a l'Escítia

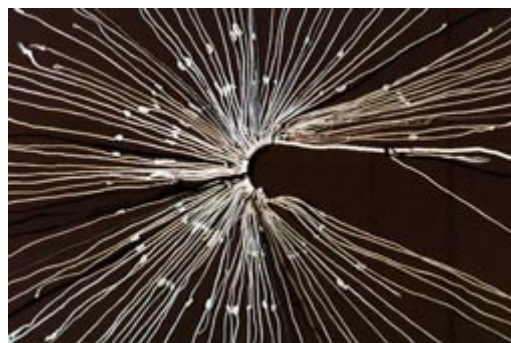


*Ketsujo de Ryu-Kyu*

Però ara no ens interessa tant la utilització de cordes i nusos per comptar sinó per registrar i representar nombres. Hi ha constància de l'ús de cordes amb nusos amb aquesta funció entre els àrabs i a tot l'orient. Encara a les illes Ryu-Kyu (prop del Japó) es fan servir els *ketsujo* per portar registre de jornades de treball, deutes...

El sistema més elaborat que es coneix per registrar nombres amb cordes és els dels *kipus* inkes. La pròpia paraula *kipu* significa nus en llengua *quechua*. Es coneixen uns 600 *kipus* anteriors a l'arribada dels espanyols al 1532, la majoria fets amb cordes de cotó o de pèl de llama.

Els *kipus* són encara objectes de profunds estudis. Els inkes no disposaven de cap sistema d'escriptura i, algunes de les investigacions intenten esbrinar si també els *kipus* podien recollir aspectes relatius a narracions, noms de pobles, genealogies... Hi ha arguments en contra al·legant que acomplien una funció de servei en una comunitat plurilingüística (quechua, aimara, puquina...). Tot i així podien ajudar com a recurs mnemotècnic.



Khipu procedent d'Arica

El que sí que sabem era que representaven registres numèrics en base deu. Malgrat que els espanyols van tenir un desinterès general per l'ús dels *kipus* i van recollir poca informació (més aviat van ser protagonistes claus de la desaparició d'informació) tenim alguns documents que en fan algunes referències. Per exemple disposem del testimoni de l'any 1560 d'un soldat de Pizarro:

Los indios de este país tienen registros y cuentas de las cosas que dan a sus señores... empleando lo que llaman quipos; todo lo que dan [incluso] desde hace mucho tiempo se registra también allí. Y ese testigo sabe que dichos quipos son muy exactos y veraces pues en numerosas y distinta ocasiones ha comprobado alguna cuentas que ha tenido con indios contando las cosas que le había dado a ellos. Y comprobó que los quipos que los citados indios tenía eran muy exactos.<sup>26</sup>

<sup>26</sup> Recollit a Bethel (1990)



També un funcionari reial, Polo de Ondengardo, va recomanar la conservació del sistema de recaptació d'impostos dels inkes, ajudats pels seus *kipus*, considerant que funcionava prou bé des de feia quatre-cents anys "segons els seus càlculs"<sup>27</sup>.

Un dels textos que recull una petita descripció del funcionament numèric dels *kipus* és degut a l'escriptor mestís peruà Inca Garcilaso de la Vega que als *Comentarios Reales de los Incas* (1560) escriu:

Los ñudos se daban por su orden de unidad, decena, centena, millar, decena de millar, y pocas veces o nunca pasaban a la centena de millar...  
En lo más alto de los hilos ponían el número mayor, que era el decena de millar, y más abajo el millar, y así hasta la unidad. Los ñudos de cada número v de cada hilo iban parejos unos con otros, ni más ni menos que los pone un buen contador para hacer una suma grande...

(*Comentarios Reales de los Incas*, libro VI, cap. VIII.)

També hi ha llibres de l'època on es recullen interessants dibuixos en el que hi apareixen el *kipus* i els *kipukamayus*, els "comptadors de *kipus*". En ells, a més de veure els *kipukamayus* observem com es fan servir en pagaments de tributs o com els porten els *chasques*, una mena de correus corredors que els transportaven, amb un sistema de relleus, d'un lloc a l'altre, tal com explica Pedro Cieza de León (1520-1554) a la *Chronica del Perú*.



L'Inka i el comptable major  
(dibuix de Martín de Murua 1590)



Missatger  
(dibuix de Guaman Poma de Ayala 1615)

El *Tawatinsuyu*, (*l'Imperi de les quatre regions*) abastava el que ara és el sud de Colòmbia, Perú, Equador, Bolívia, Xile central i el nord-oest d'Argentina amb una varietat climàtica enorme molt afectada, entre altres aspectes per les grans diferències d'altitud i de latitud dels seus territoris (recordem que estem parlant de la llarga serralada andina). La seva població està calculada en quantitats properes als nou milions d'habitants només a la zona del Perú (Bethel, 1990). Aquesta estava organitzada en unitats familiars i agrupacions d'unitats familiars, en un

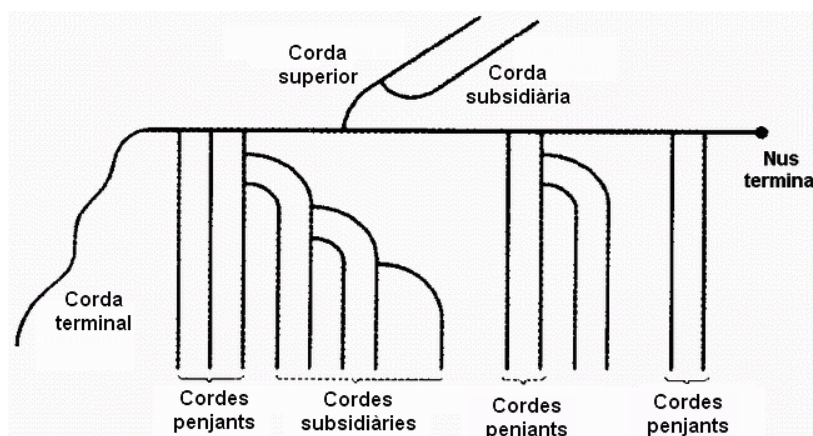
<sup>27</sup> Extret de l'article de FOSSA, LYDIA (1999): *Los khipu en Notables daños... de Polo de Ondegardo: una contribución a su descripción*:  
<http://www.coh.arizona.edu/spanish/FossaLydia/Khipu.html>

model que s'ha anomenat, en ocasions, "assentament dispers". Els censos exactes sobre les unitats familiars de cada lloc eren fonamentals perquè els tributs es pagaven amb persones i jornades de treball. El detall d'aquests censos arribava a classificar la població per sexes i grups d'edat, arribant a diferenciar fins a deu grups. El lloc on es guardava tota aquesta informació eren els *kipus*.

Hi ha molta varietat de *kipus* i s'està estudiant el significat dels colors de les cordes, dels tipus de trenat i, fins i tot, de les orientacions dels nusos. Un *kipu*, bàsic està format per una **corda principal**, **cordes penjants**, en ocasions amb altres **cordes subsidiàries** lligades i **cordes superiors**, amb orientació contrària a les penjants que poden agrupar un conjunt de cordes penjants o no; quan agrupa s'ha vist alguna vegada que el nombre anotat és la suma dels agrupats. De vegades també hi ha una **corda terminal**.



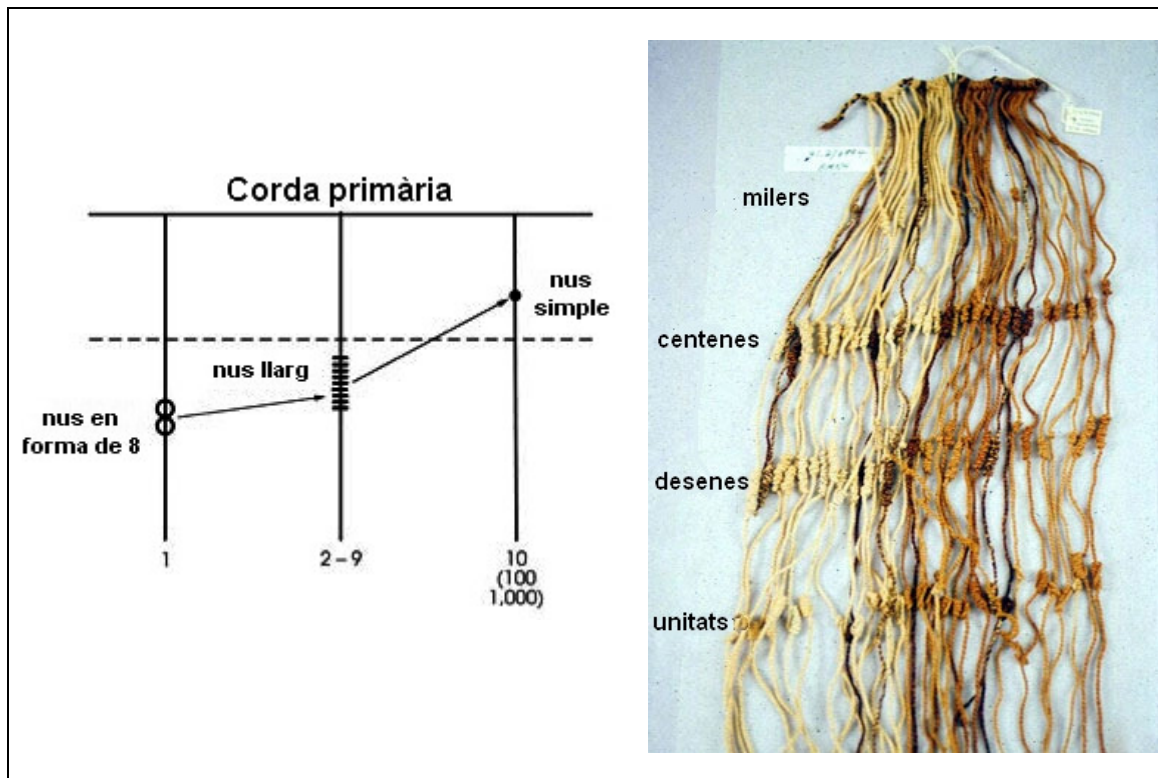
*Detall de cordes subsidiàries*



A cada corda es fan determinats nusos que serveixen també per esglaonar els nivells d'ordre numèric (unitats, desenes...). Es poden fer amb més d'una orientació que s'acostumen a diferenciar anomenant-los en Z o en S.

<p><b>Nus en vuit</b> (Z i S) Representen l'1 a les unitats</p>	<p><b>Nus llarg</b> (S i Z) Representen les unitats del 2 al 9</p>	<p><b>Nus simple</b> Cada nus representa una desena, una centena... segons on estigui col·locat</p>

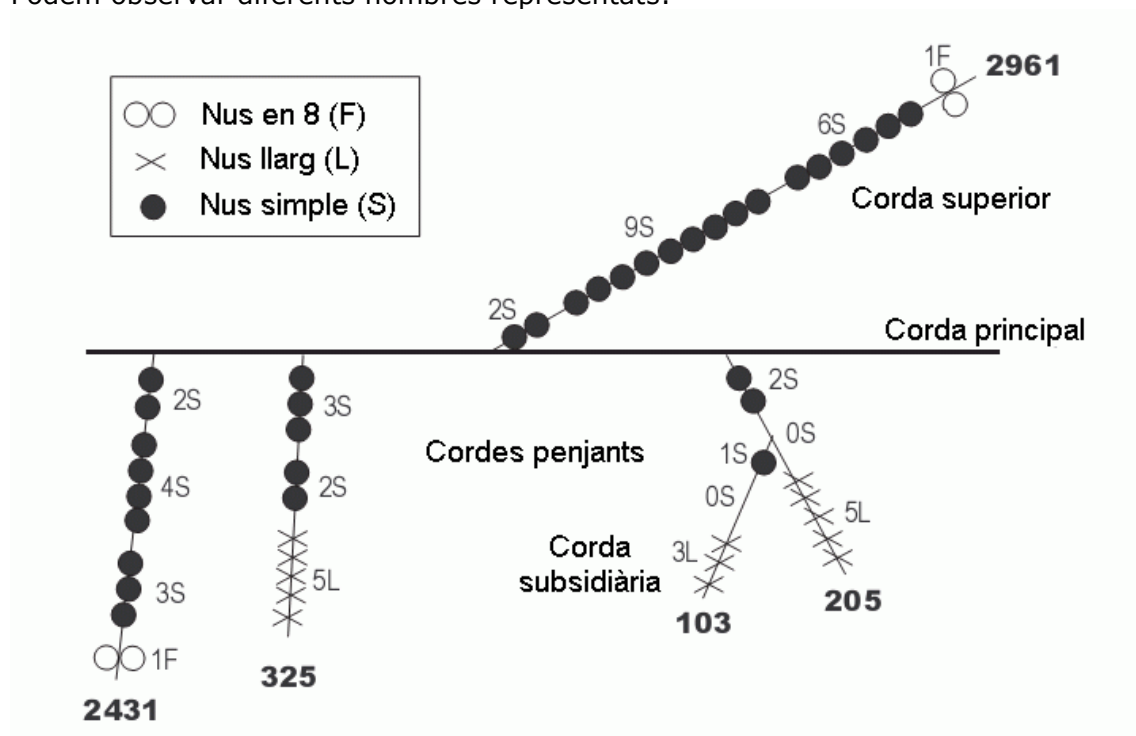
Els dos esquemes que ens ajuden a veure com és la distribució dels nusos i com es fa el registre numèric:



Representació del 139	
	un nus simple
	tres nusos simples
	un nus llarg de nou



Podem observar diferents nombres representats:



Els *khipus* podien arribar a tenir moltes cordes. El més gran que es coneix, trobat a un cementiri inka de la vall de Lluta (Arica), en té més de mil cinc-centes.



A la Laguna de los Cóndores (Perú) s'han trobat recentment, al 1996, alguns que, pels nombres representats, es pensen que feien funcions de calendari. Per exemple, hi ha un que presenta 730 cordes en 24 grups d'aproximadament 30 cordes cadascun. Es correspondria amb un cicle de dos anys ( $365+365=730$ ) organitzat en 24 mesos.

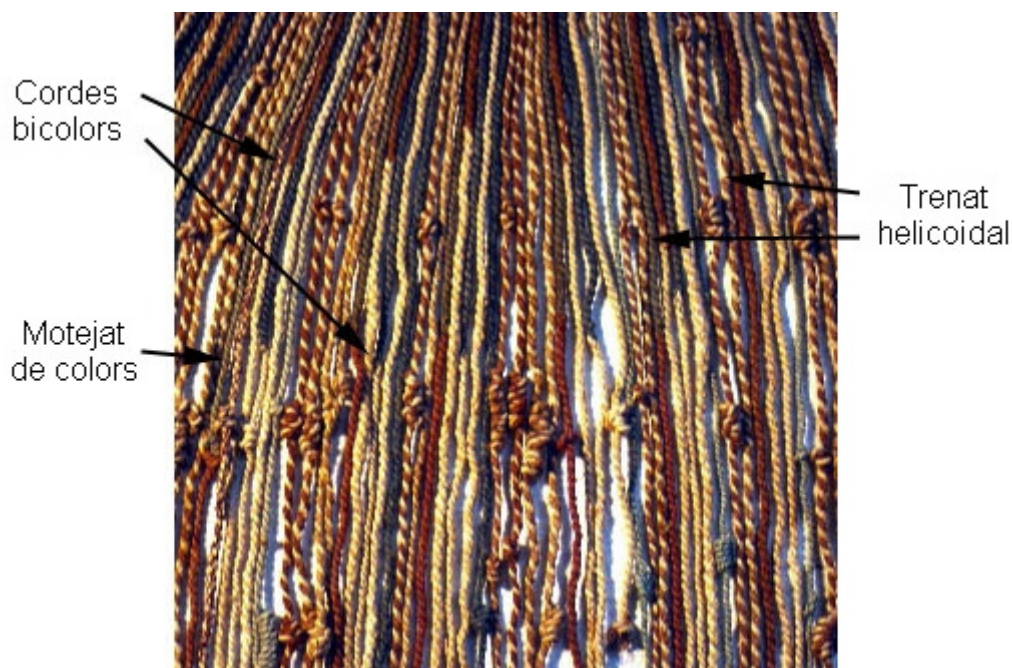


Una cosa que també sabem és que els inkes no utilitzaven els *kipus* com a instruments de càlcul ja que, pel que sembla, feien servir una mena d'àbac anomenat *yupana*.



*Khipukamayuk* i, a la part inferior esquerra una *yupana*  
(dibuix de Guaman Poma de Ayala 1615)

Els khipus fan servir cordes del mateix color o de colors diferents dins d'un mateix grup de fils. També es troben cordes amb dos colors barrejats de diferents formes (mitja i mitja, o amb diferents trenats bicolores).



Els diferents tipus de trenats i orientacions dels nusos (que alguns interpreten com una mena de codi binari), la diversificació de colors i de barreja d'aquests a les pròpies cordes i, especialment, els testimonis recollits de l'època ens certifiquen que els inkes organitzaven la seva administració amb els *kipus* on recollien els censos de famílies, els tributs en espècie o en jornades de treball, el cens particular d'artesans, càrregues, estocs dels magatzems i graners... Els *Khipukamayuk* eren autèntics codificadors, conservadors i transmissors de dades d'estadístiques. Però, hores d'ara, encara que puguem llegir el valor numèric d'una corda, no sabem a què és correspon aquell valor, què quantifica..

## Resum

En el moment en que apareixen els estats i les necessitats d'organització i administració augmenten, apareixen les primeres formes d'escriptura. En alguns casos, com a Mesopotàmia, l'escriptura dels nombres és anterior a la de la llengua. Les numeracions escrites van aparèixer, doncs, per la necessitat de portar un registre de quantitats cada vegada més grans. Un sistema de numeració escrita s'estructura de la següent manera.

- **Una base.** El sistema de marques "un a un" com les trobades a les talles prehistòriques és clarament insuficient per representar quantitats grans. El principi de base serveix per superar aquest problema. Una base és un nombre triat per fer agrupaments de quantitats. En la nostra numeració moderna el nombre "base" és 10 i conformem un sistema esglaonat:
  - unitats
  - desenes (10 unitats)
  - centenes (10 desenes)
  - milers (10 centenes)
- **Uns signes.** Ha d'existir un sistema acordat que faci relacionar un signe i un valor. Un exemple de sistema acordat pot ser el sumeri on tenim sis signes: per la unitat, per la desena, per la seixantena, per deu seixantenes, per seixanta seixantenes i per deu vegades seixanta seixantenes.
- **Un principi operatiu.** S'ha d'estructura un codi que ens faci interpretar quines operacions s'han de fer amb aquests signes: sumes, productes i sumes, sumes i restes...

Amb una base, uns signes i un sistema operacional es poden construir els sistemes de numeració escrita.

- **Sobre la base.** A la història de la humanitat, i observant sobre tot com es compta oralment, s'han fet servir moltes bases (2, 4, 5, 6., 10, 12...). La més universal és la base deu, que es pot justificar pensant que els deus dits de les mans probablement són el primer instrument de comptatge. Altres bases freqüents, i relacionades també amb els dits, són la base 5 (una sola mà) i la 20 (mans i peus). Una altre base d'interès especial és la base que es feia servir a l'antiga Mesopotàmia, la base 60, perquè ha perdurat en les nostres mesures horàries i angulars. Les bases grans com la 20 (maia) o la 60 (babilònica), sovint s'ajudaven d'altres bases auxiliars per reduir la repetició exagerada de símbols. Per exemple els maies van fer servir la 5 i a Babilònia la 10. Les numeracions purament additives (basades només en la suma) també de vegades les utilitzaven. Només cal observar les numeracions grega-acrofònica i la romana, de base principal 10, i que feien servir la 5 com auxiliar.
- **Sobre els signes.** Deixant de banda les numeracions orals, podem diferenciar entre numeracions **escrites** (bidimensionals) i **figurades** (tridimensionals). Entre les segones tres sistemes interessants han estat els *càculi* sumeris (petites peces d'argila), les numeracions digitals (representades amb els dits de les mans) i els *kipus* andins (cordes amb nusos). En quant els signes emprats a les numeracions escrites han estat molt diversos i el seu disseny ha depès, principalment, dels material utilitzats per l'escriptura i del caràcter més o menys simbòlic que se li hagi volgut assignar. El signe per l'u és una excepció: es pot observar que gairebé sempre recorda una osca d'una talla. Un signe especial, que només apareix en determinades numeracions que el necessi-

ten, és el del zero que, unes vegades indica un espai buit i altre una quantitat nul·la.

• **Sobre les operacions.** Els sistemes de numeració estudiats al món es poden classificar en tres grans grups:

- **additius.** Fan servir la suma com a única operació per construir el nombre. Es sumen els valors de cada signe representat i obtenim el valor del nombre. Un signe, una xifra, no canvia de valor si canvia de lloc. A mesura que els nombres creixen i augmentem el nivell d'ordre de la base (passem d'unitats a desenes, de desenes a centenes) hem d'anar incorporant nous signes que les representin. A aquest sistema pertanyen numeracions com la sumèria, l'egípcia, la grega acrofònica, l'asteca... Hi ha casos en els que s'assigna un signe a cada unitat (1, 2, 3...) a cada desena (10, 20, 30...), a cada centena (100, 200, 300...) utilitzant, sovint, lletres de l'alfabet. Per exemple a la numeració grega jònica o a l'hebrea.
- **híbrids.** Combinen aspectes additius i multiplicatius. La col·locació d'un signe davant o darrera d'un altre ens indica si hem de multiplicar o sumar els seus valors. Per exemple representa un "tres" davant d'un "deu" s'interpreta com "tres deus", és a dir "trenta"; hem multiplicat. Un "tres" darrera d'un "deu" s'interpreta com a "deu i tres", és a dir "tretze"; hem sumat. Aquest sistema evita la iteració excessiva de xifres. Per representar "setanta" no cal repetir set vegades el signe "deu" sinó que reduïm la seva representació a dos únics signes: "set" i "deu". Les xifres no canvien tampoc de valor quan canviem de lloc, un "sis" serà sempre un "sis" allà on estigui; només varia la interpretació de l'operació que hem de fer amb el signe següent o anterior. Aquests numeracions acostumen a necessitar un signe especial per a cada potència de la base a mida que els nombres es van fent més grans. Un exemple d'aquesta numeració és la xinesa tradicional.
- **posicionals.** El valor d'una xifra depèn del lloc on està escrita. Cada lloc representa un valor d'una potència de la base. Així, per exemple, a la nostra numeració moderna, quan representem el nombre 373 trobem un signe repetit, el 3. El primer 3, al lloc de les centenes, l'interpretem com multiplicat per 100 (i diem "tres-cents"). L'altre 3, el tenim al lloc de les unitats i el seu valor "natural": tres. Per no donar llocs a confusió els espais on no hi ha xifres s'han d'indicar. Per exemple si volem representar "cinc-cents cinc" i ens limitem a separar les xifres (5 5) podem confondre fàcilment la quantitat a llegir amb un valor menor: "cinquanta-cinc" (55). Cal utilitzar un signe que assenyali els llocs buits. En el nostre cas aquest signe és el 0, que anomenem zero. El "cinc-cents cinc" es representarà sense ambigüitats (505, diferent de 55, de 550, de 5005, de 5050...). Amb aquest sistema no cal inventar-se signes nous cada vegada que augmentem un nivell d'ordre en la base perquè només cal afegir un lloc més. Les numeracions maia, assírio-babilònica, xinesa de varetes i hindú han estat les úniques quatre numeracions posicionals conegudes.

La numeració posicional hindú, amb deu únics signes (1,2,3,4,5,6,7,8,9 i 0) s'ha imposat com el millor sistema existent i és el que fem servir encara, tot i que amb la grafia dels signes lleugerament modificades. La maia i la babilònica tenien la limitació de fer servir tres únics signes (1, 5, 0 per la maia i 1, 10, 0 per la mesopotàmica) el que feia iterar-los molt dificultant la lectura. La xinesa era bàsicament una numeració operatòria.

El sistema posicional hindú permet:

- representar nombres de la grandària que vulguem sense incorporar nous signes a cada augment de nivell d'ordre en la base.
- utilitzar una quantitat raonable de signes: ni pocs, evitant iteracions en la representació, ni massa, estalviant esforç a la memòria i a la velocitat de "traducció" signe-valor.
- establir un longitud del nombre que permet la seva lecto-escriptura ràpida i que es correspon amb la grandària de la quantitat representada: cent-mil (100000) és més llarg que mil (1000).

Tot i així, la millor virtut del sistema numèric hindú, especialment gràcies a la utilització numèrica del zero, com a valor nul, calcula amb els propis signes, cosa que la majoria de numeracions existents no facilitava. Per calcular, abans de la numeració hindú, es feien servir, principalment, àbacs (on, curiosament, una columna buida venia a representar aquest zero numèric). Els àrabs van conèixer a l'Edat Mitjana la numeració hindú i van ser els principals responsables d'estendre el seu coneixement a Europa. D'aquí que al nostres nombres els hi diguem indo-àràbics.

L'acceptació a Europa de la numeració indoaràbiga va ser lenta però la seva capacitat de portar els llibres de comptes i operar a la vegada amb les mateixes xifres va fer que acabessin imposant-se sobre les numeracions romanes i alfabètiques que, en diferents àmbits, es feien servir encara.

## **Apèndix A: Esquemes sobre sistemes de numeració**

A continuació es presenten unes fitxes resum de les numeracions vistes en aquest capítol. S'ha intentat que hi hagi alguna representació de cadascun dels tipus i sub-tipus esmentats. Així hi trobarem, per exemple, un parell de **numeracions figurades** (la sumèria i els khipus). També hi ha numeracions **additives** de les tres espècies, una **híbrida**, en aquest cas només de 5a espècie, i **posicionals** de les dues espècies. A més hi trobarem altres numeracions no vistes anteriorment que poden tenir diferents tipus d'interès. Així hi veurem una bona mostra de numeracions additives i amb diferents bases donat que poden tenir una fàcil implementació didàctica. També s'ha intentat que hi hagi representació de numeracions d'arreu del món, algunes d'elles encara utilitzades. Entre aquestes, per exemple, hi veurem la numeració Braille utilitzada pels invidents. Una numeració que no arriba ser pròpiament un sistema sinó gairebé una forma "d'abreujament de marques" és la numeració "dels camps d'urnes". S'ha inclòs perquè no tenim cap altre model conegut a l'Europa de l'Edat del Bronze (tret de les zones grega i itàlica). Coneixem escriptures, algunes no desxifrades encara com la ibera, però en sabem ben poc de si disposaven d'un model de numeració escrita.

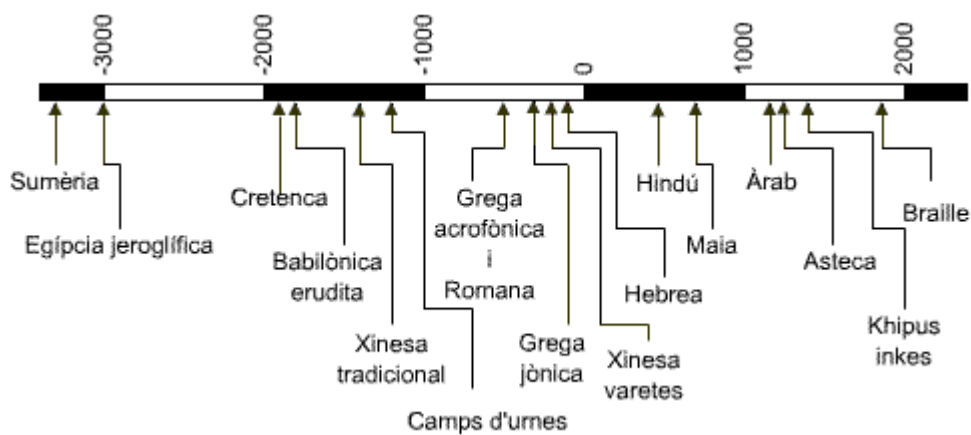
A cada numeració es presenten les xifres i un exemple numèric (sempre el mateix) per veure com es construeixen els nombres. A més s'inclou un gràfic que intenta fer veure l'esglaonament de les xifres i la proporció del salt de base. En alguns casos hi ha algunes observacions que s'ha considerat interessant afegir.

Les numeracions s'han ordenat cronològicament per fer observar la manca de linealitat en l'evolució dels sistemes numèrics. No sempre la distància geogràfica o temporal ha estat l'únic entrebanc en les transmissions entre sistemes de numeracions d'unes zones a unes altres; en ocasions intervenen altres factors culturals o de dominació política. Per exemple els grecs van adoptar la base 60 de Mesopotàmia per les mesures angulars però no el seu sistema posicional. Un altre exemple pot ser el dels asteques que tampoc van adoptar el sistema posicional dels maies i van mantenir un sistema additiu molt més iteratiu i limitat.

Les numeracions presentades; agrupades per tipus són les següents:

<b>Additives</b>	1a espècie (iteratives)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Egípcia</li> <li>• Cretenca</li> <li>• Cultura dels Camps d'Urnas</li> <li>• Asteca</li> </ul>
	2a espècie (iteratives amb base auxiliar)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sumèria</li> <li>• Grega acrofònica</li> <li>• Romana</li> </ul>
	3a espècie (alfabètiques)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grega jònica</li> <li>• Hebrea</li> </ul>
<b>Híbrides</b>	5a espècie	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Xinesa tradicional</li> </ul>
<b>Posicionals</b>	1a espècie (iteratives o amb components additius)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Babilònica erudita</li> <li>• Xinesa de varetes</li> <li>• Maia</li> <li>• Inka</li> </ul>
	2a espècie	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hindú</li> <li>• Àrab</li> <li>• Braille</li> </ul>

### Línia del temps



Mesopotàmia  
(Numeracions sumèria i babilònica)



Egipte  
(Numeració jeroglífica)



Civilització micènica  
(Numeració cretenca)



La Xina  
(Numeracions tradicional i de varetes)





### Civilització dels Camps d'Urnas (Numeració de les destrals)



Grècia  
(Numeracions acrofònica i alfabètica)



Imperi romà  
(Numeració romana)



Índia  
(Numeracions hindús)



Civilització Maia  
(numeracions de compte llarg i maia)



Islam  
(Nombres à rabs)







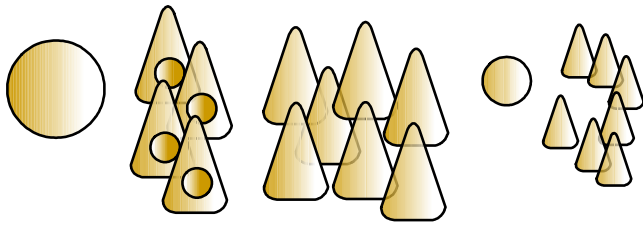
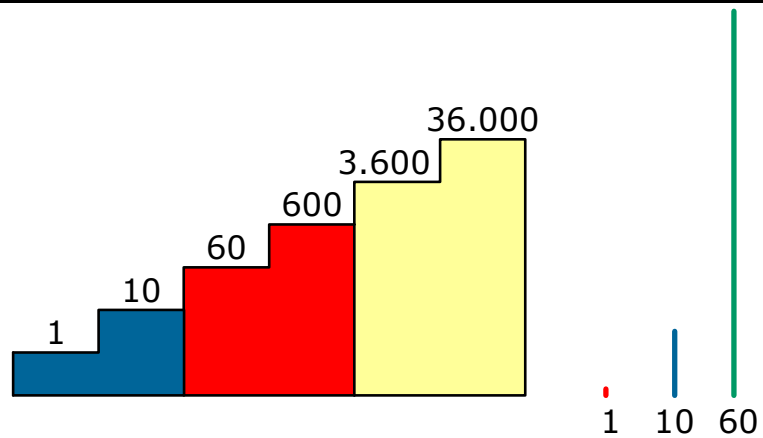
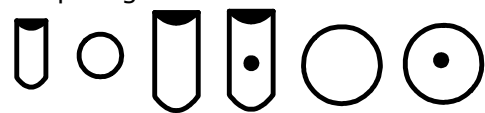









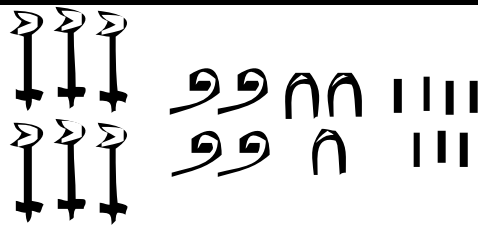
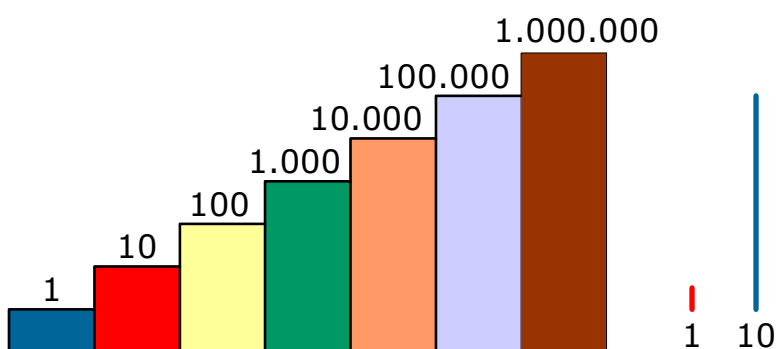
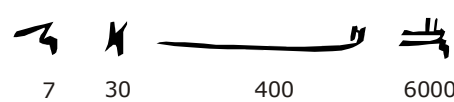

Civiltzació asteca  
(Numeració asteca)




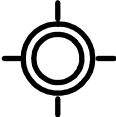
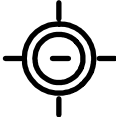
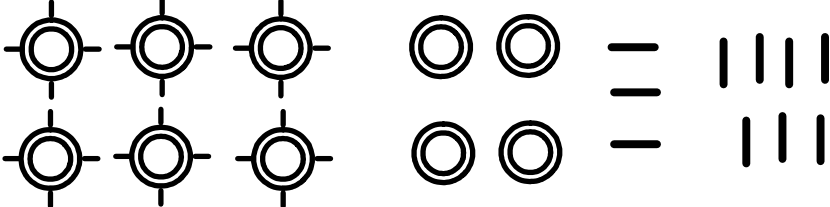
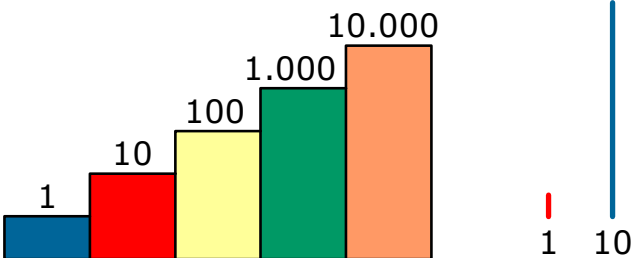





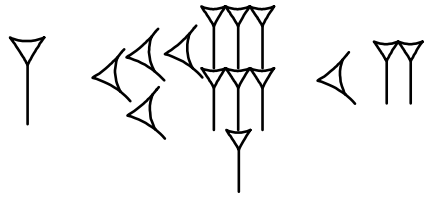
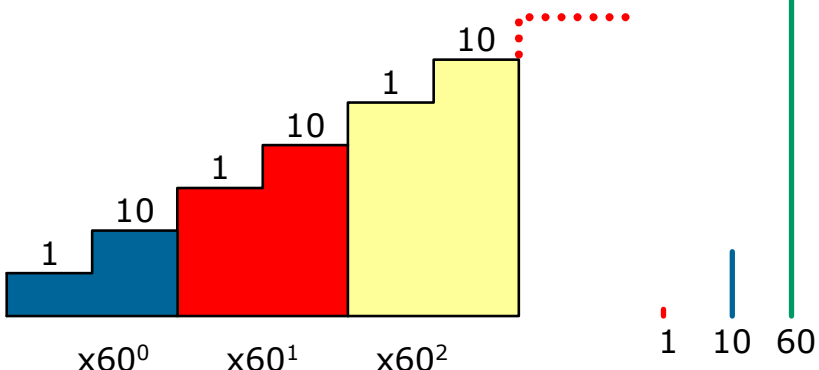
Inkes  
(Numeració en khipus)

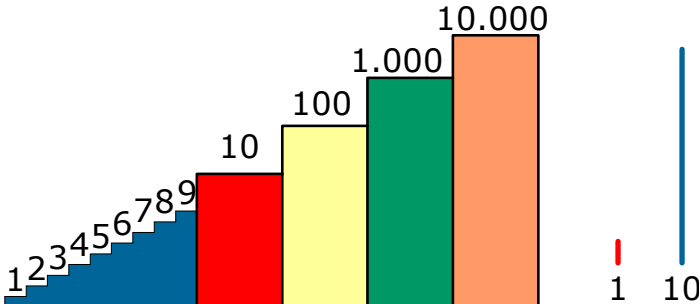


Numeració sumèria					
Apa- rició	~3300 a.n.e.	Zona	Mesopotàmia		
Ti- pus	Additiva de 2 <sup>a</sup> es- pècie	Base principal	60	Base auxiliar	10
Capacitat de repre- sentació	Limitada		Zero	No necessita	
Xifres	 1 (60 <sup>0</sup> )	 60 (60 <sup>1</sup> )	 3 600 (60 <sup>2</sup> )		
	 10 (10·60 <sup>0</sup> )	 600 (10·60 <sup>1</sup> )	 36 000 (10·60 <sup>2</sup> )		
Exem- ple 6437	 3600 2400 420 10 7				
Cons- truc- ció	3600+600+600+600+600+60+60+60+60+60+60+60+10+1+1+1+1+1+1				
Es- truc- tura					
Obser- vaci- ons	És una numeració <i>figurada</i> amb peces d'argila. Posteriorment cada figura va adoptar una forma pictogràfica:  1 10 60 600 3600 36000				


Numeració egípcia					
Aparició	3000 - 2900 a.n.e.	Zona	Egipte		
Tipus	Additiva de 1ª espècie	Base		10	
Capacitat de representació		Limitada		Zero	No necessita
Xifres	 1 (10 <sup>0</sup> )	 10 (10 <sup>1</sup> )	 100 (10 <sup>2</sup> )	 1 000 (10 <sup>3</sup> )	
	 10 000 (10 <sup>4</sup> )	 100 000 (10 <sup>5</sup> )	 1 000 000 (10 <sup>6</sup> )		
Exemple 6437					
Construcció	1000+1000+1000+1000+1000+1000+100+100+100++100+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1+1+1				
Estructura					
Observacions	A més de la numeració jeroglífica a l'antic Egipte els escribes van fer servir altres numeracions també additives però de 3a espècie, semblants a les alfabètiques.				
	Hieràtica (2500 a.n.e.)  7      30      400      6000		Demòtica (750 a.n.e.)  7      30      400      6000		

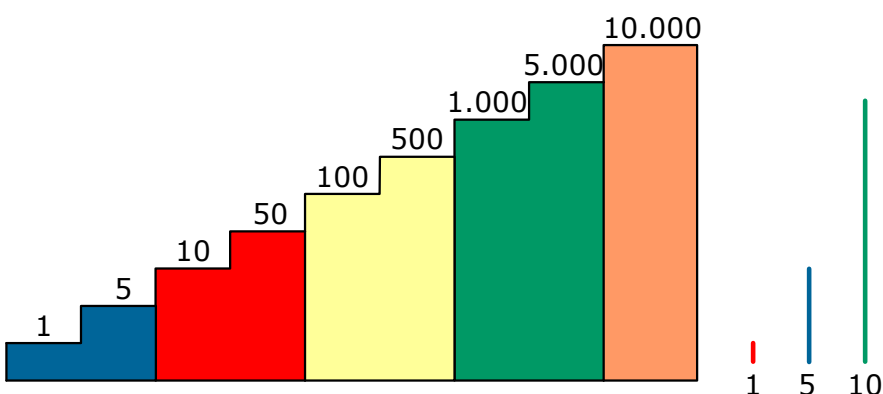
Numeració cretenca					
Aparició	1900 a.n.e.		Zona	Creta	
Tipus	Additiva de 1ª espècie		Base		10
Capacitat de representació		Limitada		Zero	No necessita
Xifres	 1 (10 <sup>0</sup> )	 10 (10 <sup>1</sup> )	 100 (10 <sup>2</sup> )	 1 000 (10 <sup>3</sup> )	 10 000 (10 <sup>4</sup> )
Exemple 6437					
Construcció	1000+1000+1000+1000+1000+1000+100+100+100+ +100+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1+1+1				
Estructura					
Observacions	La numeració cretenca, de la cultura minoica, es va fer servir amb totes les escriptures de l'illa: Lineal A (1900 a.n.e), jeroglífica (1700 a.n.e) i Lineal B (1350 a.n.e.)				

Numeració babilònica erudita						
Aparició	1800 a.n.e.		Zona	Mesopotàmia		
Tipus	Posicional de 1 <sup>a</sup> espècie		Base principal	60	Base auxiliar	10
Capacitat de representació	Il·limitada		Zero	Sí (des del segle IV a.n.e.)		
Xifres	 1 (60 <sup>0</sup> )		 10 (60 <sup>1</sup> )		 zero	
Valors de po-	etc <b>6è</b> (60 <sup>n</sup> )	12,960 000 <b>5è</b> (60 <sup>4</sup> )	216 000 <b>4t</b> (60 <sup>3</sup> )	3600 <b>3r</b> (60 <sup>2</sup> )	60 <b>2n</b> (60 <sup>1</sup> )	1 <b>1r</b> (60 <sup>0</sup> )
Exemple 6437	 1 ; 47 ; 12					
Construcció	$1 \cdot 60^2 + (10+10+10+10+1+1+1+1+1+1+1) \cdot 60^1 + (10+1+1)$					
Estructura						
Observacions	<p>Les unitats de temps (hores, minuts i segons) i les de mesura angular segueixen encara el mateix esquema:</p> <p>6437 segons = 1 hora 47 minuts 12 segons</p>					

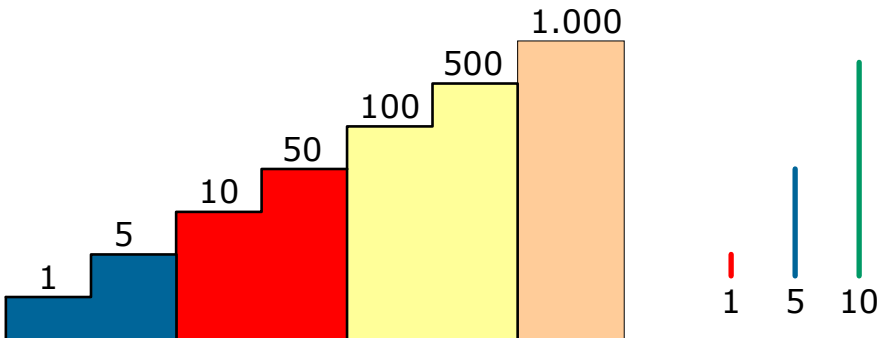
Numeració xinesa tradicional						
Aparició	1450 a.n.e.		Zona	La Xina		
Tipus	Híbrida de 5a espècie		Base		10	
Capacitat de representació		Limitada		Zero	No necessita	
Xifres	一 1 (10 <sup>0</sup> )	二 2	三 3	四 4	五 5	
	六 6	七 7	八 8	九 9	十 10 (10 <sup>1</sup> )	
	百 100 (10 <sup>2</sup> )		千 1 000 (10 <sup>3</sup> )		萬 10 000 (10 <sup>4</sup> )	
Exemple 6437		六千四百三十七 6    1000    4    100    3    10    7				
Construcció		6·1000 + 4·100 + 3·10 + 7				
Estructura						
Observacions		A èpoques molt posteriors es van fer desaparèixer els signes de 10, 100, 1000... convertint-se en posicional. Amb aquesta representació abreujada va caldre introduir un símbol pel zero.				

### Numeració de la Cultura dels Camps d'Urnas

Aparició	~1 200 a.n.e.	Zona	Europa (Catalunya, Aragó; Est de França; Centro-Europa, Països Baixos)		
Tipus	Additiva de 1ª espècie	Base			5
Capacitat de representació		Molt limitada		Zero	No necessita
Xifres	/ 1 (5 <sup>0</sup> )			\ 5 (5 <sup>1</sup> )	
Observacions	<p>Aquesta numeració s'ha descobert en unes falçs trobades al 1947 a Frankeblen (Alemanya). El lot era d'unes 250 falç i s'han torbat marques repetides que s'ha interpretat com a un sistema de numeració de base quinària. Només s'han trobat nombres fins a 29 per la qual cosa es pensa que podien tenir algun ús ritual relacionat amb un cicle lunar de 29 dies.</p>				
Nombres de 1 a 29	/	//	///	////	\
	1	2	3	4	5
	/\	//\	///\	////\	\
	6	7	8	9	10
	/\	//\	///\	////\	\
	11	12	13	14	15
	/\	//\	///\	////\	\
	16	17	18	19	20
	/\	//\	///\	////\	\
	21	22	23	24	25
	/\	//\	///\	////\	\
	26	27	28	29	

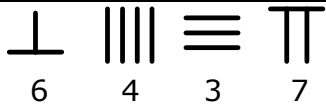
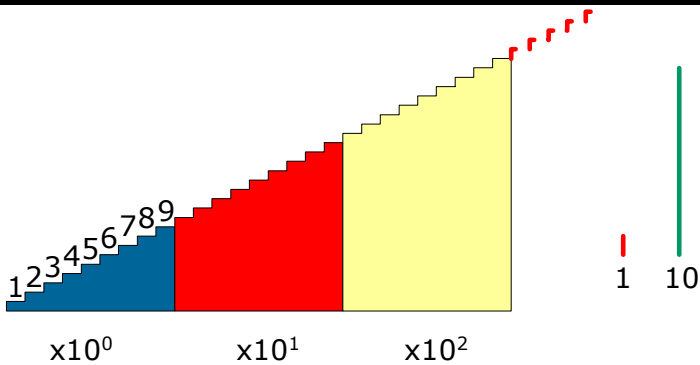

Numeració grega acrofònica						
Aparició	500 a.n.e.		Zona	Grècia i àrea mediterrània d'influència		
Tipus	Additiva de 2a espècie		Base	10	Base auxiliar	5
Capacitat de representació		Limitada		Zero	No necessita	
Xifres	I 1 (10 <sup>0</sup> )	Δ 10 (10 <sup>1</sup> )	Η 100 (10 <sup>2</sup> )	Χ 1.000 (10 <sup>3</sup> )	Μ 10.000 (10 <sup>4</sup> )	
	Γ 5 (5·10 <sup>0</sup> )	ΑΔ 50 (5·10 <sup>1</sup> )	ΑΗ 500 (5·10 <sup>2</sup> )	ΑΧ 5.000 (5·10 <sup>3</sup> )		
Exemple 6437	ΑΧ ΗΗΗΗ ΔΔΔ Γ Ι Ι 5000 1000 400 30 5 2					
Construcció	5000+1000+100+100+100+100+10+10+10+5+1+1					
Estructura						



















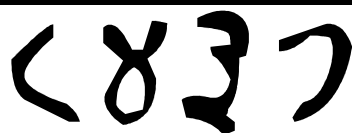
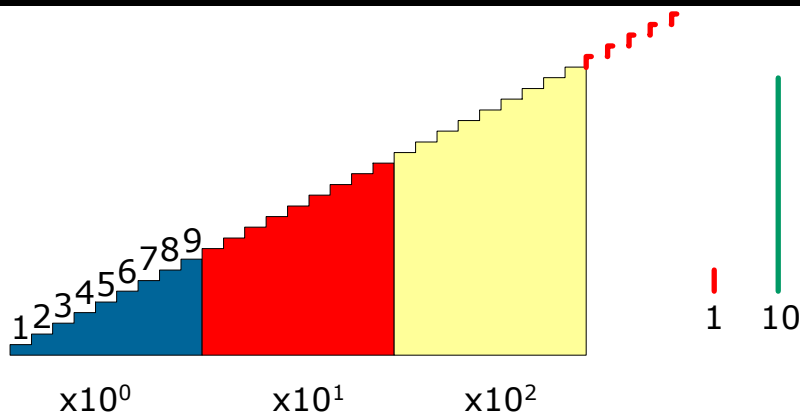
Numeració romana					
Aparició	500 a.n.e.	Zona	Imperi romà (tot el voltant de la Mediterrània)		
Tipus	Additiva de 2a espècie	Base	10	Base auxiliar	5
Capacitat de representació		Limitada		Zero	No necessita
Xifres	I 1 (10 <sup>0</sup> )	X 10 (10 <sup>1</sup> )	C 100 (10 <sup>2</sup> )	M  1.000 (10 <sup>3</sup> )	
	V 5 (5·10 <sup>0</sup> )	L 50 (5·10 <sup>1</sup> )	D 500 (5·10 <sup>2</sup> )		
Exemple 6437		V̄ I CDXXXVII			
Construcció		(5+1)·1000+(-100+500)+10+10+10+5+1+1			
Estructura					
Observacions		<p>La numeració romana té regles que la fan molt irregular:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>no es poden escriure més de tres símbols seguits</li><li>té aspectes sostractius en la forma d'escriure 4, 9, 40, 90.... Per exemple 1 resta davant de 5 per formar 4 (IV) i suma darrera per formar 6 (VI)</li><li>un nombre amb una ratlla a sobre queda multiplicat per 1000. Emmarcat amb tres ratlles queda multiplicat per 100.000</li></ul> <div><div>XXIII</div><div>→ 23·1000 = 23.000</div></div> <div><div>IX</div><div>→ 9·100.000 = 900.000</div></div>			




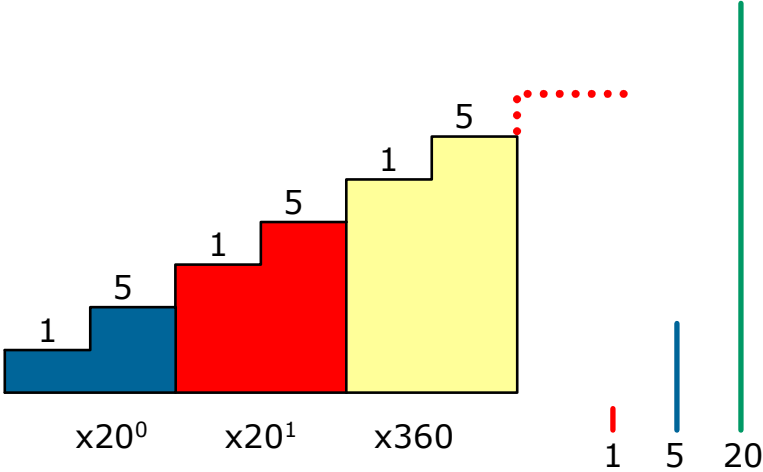
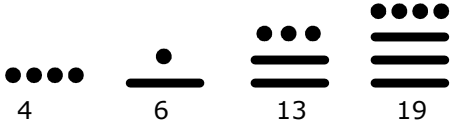
### Numeració xinesa erudita (de varetes)

Aparició		200 a.n.e.		Zona	La Xina	
Tipus		Posicional de 1a espècie		Base	10	
Capacitat de representació		Il·limitada		Zero	Primer es va deixar un espai buit. Més tard es va incorporar un cercle per influència hindú	
Xifres	Hengs	1	2	3	4	5
	Tsungs	—	=	≡	≡≡	≡≡≡
	Hengs	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥⊥
	Tsungs	⊥	⊥	⊥	⊥	⊥
Valors de posició	etc	10 000	1 000	100	10	1
	(6è) (10 <sup>n</sup> )	(5è) (10 <sup>4</sup> )	(4t) (10 <sup>3</sup> )	(3r) (10 <sup>2</sup> )	(2n) (10 <sup>1</sup> )	(1r) (10 <sup>0</sup> )
Exemple 6437						
Construcció		6 · 1000 + 4 · 100 + 3 · 10 + 7				
Estructura						
Observacions		<p>Aquest sistema numèric va ser utilitzat fonamentalment en el càlcul. Per evitar confusions amb els espais buits s'alternaven les xifres <i>hengs</i> (unitats, centenars...) amb les <i>tsungs</i> (desenes, milers...). Més tard les xifres s'escriuien sobre unes quadrícules que evidenciaven els espais buits. Finalment es va incorporar un zero en forma de cercle.</p> <p>4608</p> 				



Numeració hindú						
Aparició	450 n.e.		Zona	Índia		
Tipus	Posicional de 2a espècie		Base		10	
Capacitat de representació		Il·limitada		Zero	Sí	
Xifres	Hi ha moltes variacions de les xifres. Aquestes són les Gwalior					
						
	1	2	3	4	5	
						
	6	7	8	9	0	
Valors de posició	etc	10 000	1 000	100	10	1
						
	(10 <sup>n</sup> )	(10 <sup>4</sup> )	(10 <sup>3</sup> )	(10 <sup>2</sup> )	(10 <sup>1</sup> )	(10 <sup>0</sup> )
Exemple 6437						
	6      4      3      7					
Construcció	$6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$					
Estructura						
Observacions	De les xifres hindús deriven les xifres aràbigues i les nostres actuals.					

Altres xifres hindús	Variant	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Bengali	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
	Gujarati	૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯
	Gurumukhi	੦	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯
	Kannara	೦	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯
	Malaia	൦	൧	൨	൩	൪	൫	൬	൭	൮	൯
	Oriya	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
	Tamil		௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮
	Telugu	౦	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯
	Tibetana	༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩
	Leptxa	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯

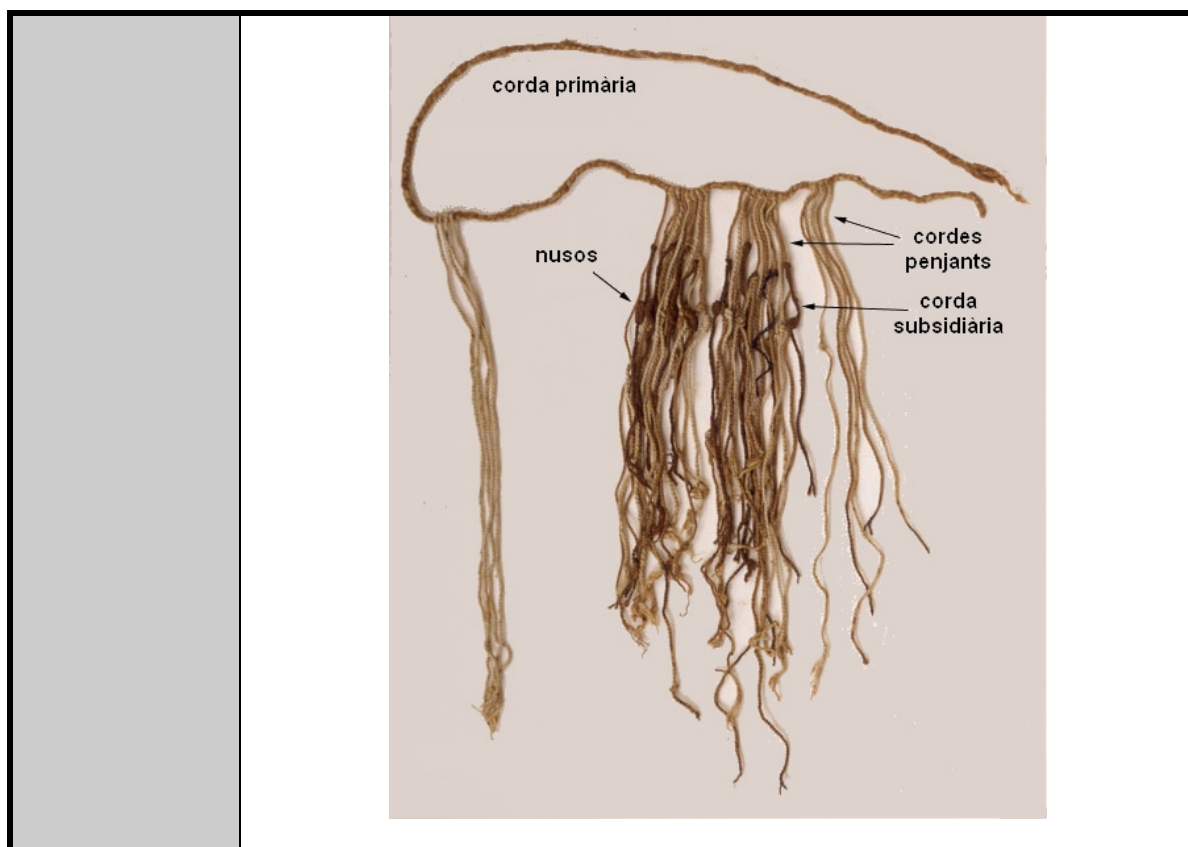
Numeració maia						
<b>Aparició</b>	~600-900 n.e.		<b>Zona</b>	Amèrica Central (península del Yucatán, Chiapas i regions de Guatemala, El Salvador y Honduras)		
<b>Tipus</b>	Posicional de 1a espècie		<b>Base principal</b>	20	<b>Base auxiliar</b>	5
<b>Capacitat de representació</b>	Il·limitada			<b>Zero</b>	Sí	
<b>Xifres</b>	● 1		— 5		👁 0	
<b>Valors de posició</b>	etc 6è ( $18 \cdot 20^{n-1}$ )	144 000 5è ( $18 \cdot 20^3$ )	7 200 4t ( $18 \cdot 20^2$ )	360 3r ( $18 \cdot 20$ )	20 2n ( $20^1$ )	1 1r ( $20^0$ )
<b>Exemple 6437</b>	 17      15      17					
<b>Construcció</b>	$(2+5+5+5) \cdot (18 \cdot 20) + (5+5+5) \cdot 20^1 + (2+5+5+5) \cdot 20^0$					
<b>Estructura</b>						
<b>Observacions</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>L'orientació real de la numeració és de dalt a baix</li> <li>Existeix una anomalia al 3r nivell d'ordre que trenca la continuïtat de la base 20. Es va fer per poder ajustar els usos calendarics ja que aquest ordre val 360, aproximadament els dies de l'any</li> <li>El nombre més gran que es podia escriure a un nivell és 19</li> </ul> 					



















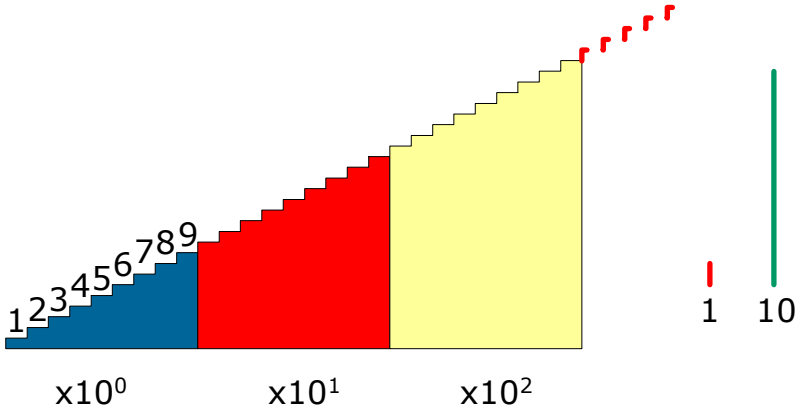
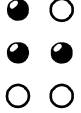
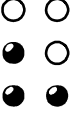


Numeració àrab						
Aparició	segle XI n.e. (amb grafia hindú des del segle VIII)		Zona	Països islàmics		
Tipus	Posicional de 2a es- pècie		Base		10	
Capacitat de represen- tació		Il·limitada		Zero	Sí	
Xifres	Àrabisques occidentals					
	١	٢	٣	٤	٥	
	1	2	3	4	5	
	٦	٧	٨	٩	٠	
	6	7	8	9	0	
	Variacions de les Àrabisques orientals					
	٤	٥		٦		
	4	5		6		
Valors de po- sició	etc	10 000	1 000	100	10	1
	⓪è	⓪è	⓪t	⓪r	⓪n	⓪r
	(10 <sup>n</sup> )	(10 <sup>4</sup> )	(10 <sup>3</sup> )	(10 <sup>2</sup> )	(10 <sup>1</sup> )	(10 <sup>0</sup> )
Exemple 6437	Occidentals                      Orientals					
	٦٤٣٧			٦٤٣٧		
	6 4 3 7			6 4 3 7		
Construcció	6 · 10 <sup>3</sup> + 4 · 10 <sup>2</sup> + 3 · 10 <sup>1</sup> + 7 · 10 <sup>0</sup>					
Estructura						
Observacions	Les xifres orientals es fan servir a alguns països musulmans del sud i est d'Àsia com, per exemple, al Pakistan (de llengua urdú)					







Numeració braille						
Aparició	segle XIX n.e.	Zona	Universal			
Tipus	Posicional de 2a espècie	Base				10
Capacitat de representació	Il·limitada	Zero				Sí
Xifres						 Símbol numèric especial
						
Valors de posició	etc  (10 <sup>n</sup> )	10 000  (10 <sup>4</sup> )	1 000  (10 <sup>3</sup> )	100  (10 <sup>2</sup> )	10  (10 <sup>1</sup> )	1  (10 <sup>0</sup> )
Exemple 6437	 6 4 3 7					
Construcció	$6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$					
Estructura						
Observacions	<p>És una numeració alfabètica (a-1, b-2, c-3....j-0) però posicional. Per diferenciar les paraules dels nombres abans d'un nombre s'escriu un símbol especial indicador: una mena de L invertida.</p> <p>El Braille és un sistema de lecto-escriptura tàtil per invidents inventat a mitjans del segle XIX pel francès Louis Braille. Els signes es marquen sobre una matriu de 6 punts (2x3). Hi ha 63 formes diferents de posar d'1 a 6 punts però només són útils les que no donen peu a confusions</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div>   D </div> <div>   No utilizable </div> </div>					

## **Apèndix B: Bases de numeració informàtiques**


### **Els precedents del sistema binari**

Els sistemes binaris es presten a tota mena de consideracions filosòfiques o pseudo-filosòfiques. Un mètode de representació basat exclusivament en dos únics signes de seguida porta a pensar en un model que es construeix a partir dels oposats: l'home i la dona, el bé i el mal, el cel i l'infern, el blanc i el negre... Un sistema així conté els termes que es contradiuen però fa que siguin mútuament necessaris perquè tot funcioni. Matemàticament ens interessa més com a forma de designar dicotomies del tipus: cert-fals; sí-no...

Les primeres aparicions de sistemes binaris (tret de les numeracions additivo-binàries que hem vist de les llengües *gumulgal* i *bakairi*) és en situacions de combinacions de dos elements. Un dels primers casos documentats el trobem al llibre vèdic *Chandasutra* escrit al segle III a.n.e. pel matemàtic Pingala (Gheverghese, 1996). En aquest llibre, sobre aspectes de mètrica poètica, es planteja les diferents maneres de combinar síl·labes llargues (*guru*) i curtes (*laghu*). L'autor explica que tres sons curts es poden combinar d'una manera, dos curts i un llarg de tres formes (*laghu-laghu-guru*, *laghu-guru-laghu*, *guru-laghu-laghu*), etc. Conclou que hi ha 8 formes diferents en total. També escriu sobre les possibilitats pels metres tetrasíl·làbics.









Un altre cas de combinació binària el trobem a un mil·lenari mètode oracular xinès basat en el *Yi Jing* (El llibre de les Mutacions). Sense entrar en detalls sobre el sistema, podem dir que es basa en les combinacions de dos elements agafats de tres en tres. Per exemple podríem fer un model tirant tres monedes i obtindríem 8 possibilitats (cara-cara-cara, cara-cara-creu...). Al *Yi Jing* aquestes variacions es representen amb vuit trigrammes combinant dues representacions: un segment sencer o un de tallat.

Observem els vuit trigrammes, els seus noms i significats

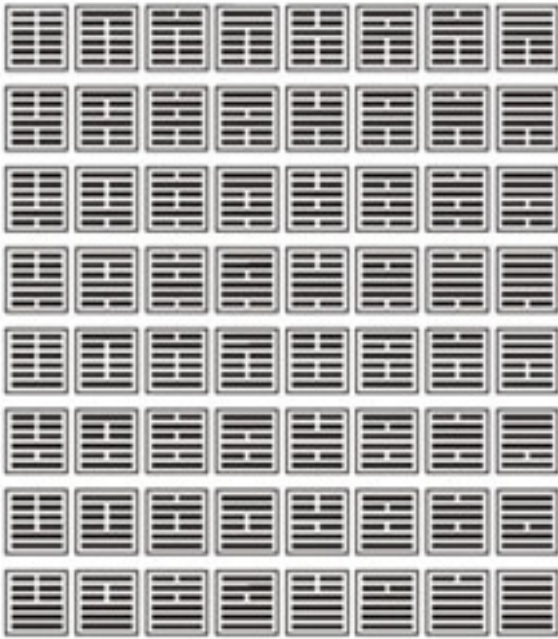
Nom			Qualitat	Imatge	Família
	Tx'ien	Allò Creatiu	Fort	Cel	Pare
	Kun	Allò Receptiu	Abnegat	Terra	Mare
	T'xien	Allò Suscitador	Mobilitzador	Tro	Primer fill
	Khan	L'Abismal	Perillós	Aigua	Segon fill
	Ken	L'Aquietament	Quiet	Muntanya	Tercer fill
	Sun	Allò Suau	Penetrant	Vent, Fusta	Primera filla
	Li	L'Adherent	Lluminós	Foc	Segona filla
	Lloro	Allò serè	Portador d'alegria	Llac	Tercera



Per veure la codificació binària de cada trigramma podem representar el segment continu amb un 0 i el trencat amb un 1


							
000	111	110	010	001	001	010	100

Aquests trigrammes es combinen de dos en dos per formar 64 hexagrames



Podem observar que els hexagrames del *Yi Jing* resolen més un problema combinatori que un de representació numèrica.

Saltant al segle XVI, tornem a trobar un altre problema combinatori. El filòsof anglès Francis Bacon (1561,1626) va inventar un sistema de codificació de missatges basat només en dos símbols combinats en grups de cinc. (Gardner, 1987)

	Lletra	Grup	Binari	Lletra	Grup	Binari
	A	aaaaa	00000	N	abbaa	01100
	B	aaaab	00001	O	abbab	01101
	C	aaaba	00010	P	abbba	01110
	D	aaabb	00011	Q	abbbb	01111
	E	aabaa	00100	R	baaaa	10000
	F	aabab	00101	S	baaab	10001
	G	aabba	00110	T	baaba	10010
	H	aabbb	00111	U/V	baabb	10011
	I/J	abaaa	01000	W	babaa	10100
	K	abaab	01001	X	babab	10101
	L	ababa	01010	Y	babba	10110
	M	ababb	01011	Z	babbb	10111

Per codificar els missatges combinava aquesta clau amb un procediment *estegano-gràfic*<sup>28</sup> d'ocultació del missatge en clau.

Un codi posterior basat també només en dos signes és el codi Morse inventat al 1835 per Alfred Vail, col·laborador de Samuel Morse, l'inventor del telègraf. Els dos signes, elèctrics, sonors o, en èpoques posteriors, lumínics, eren un senyal curt (punt) i un de llarg (ratlla). El codi Morse, a diferència dels casos anteriors no fa servir sempre la mateixa quantitat de signes sinó que varia entre 1 i 4 per les lletres i és sempre de 5 pels nombres. A més té un cinquè signe separador de lletres que és el silenci, la pausa entre senyals. Cinc silencis serveixen per separar les paraules.



Samuel Morse

## El sistema binari com a sistema numèric

El sistema binari va adquirir ple sentit d'ús a partir dels darrers anys 30 en el que es va construir el primer ordinador que funcionava amb relés i que utilitzava l'aritmètica binària. L'1 representaria el "pas de corrent" i el 0 el "no pas de corrent". Fins aquell moment l'aritmètica binària no havia tingut cap aplicació pràctica especial.



El primer en estudiar el sistema binari amb detall va ser el matemàtic alemany Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que va conèixer l'existència dels hexagrames xinesos gràcies al missioner, i també matemàtic, Joachim Buvet. Va arribar a projectar un instrument de càlcul binari amb boles mòbils. A l'any 1703 va publicar una aritmètica binària.

<sup>28</sup> L'esteganografia tracta sobre les formes d'amagar els missatges de manera que no quedin evidents pels que no estan en el secret. Un exemple d'esteganografia serien les tintes invisibles.

Per a Leibniz, el sistema binari simbolitzava una profunda veritat metafísica. Ell considerava el zero com l'emblema del no-ésser, del no-res; i a l'u com el símbol de l'ésser, de la substància. Tots dos símbols són necessaris al Creador, ja que un cosmos que contingués només substància pura resultaria indistingible d'un cosmos buit, sense arravatament ni so i l'emblema del qual seria el 0. De la mateixa manera que tot nombre natural es pot representar en el sistema binari per mitjà d'una successió adequada d'uns i zeros, així, pensava Leibniz, l'estructura matemàtica de tot l'univers creat resulta possible com a conseqüència de la disjuntiva primordial entre l'ésser i el no-res.

Martin Gardner (1980:14)

Anteriorment als treballs de Leibniz s'havien fet algunes passes com l'observació de que els nombres naturals es podien descompondre sempre en sumes de potències de dos<sup>29</sup>. També es coneixien alguns treballs sobre sistemes de numeració amb bases diferents de deu, com els de Blaise Pascal a mitjans del segle XVII. Fins i tot un matemàtic francès, Thomas Fantet, independentment de Leibniz, havia publicat un article sobre aritmètica binària i els seus avantatges en el càlcul (Ifrah, 1997)

La numeració en base 2 és un sistema posicional que té dos símbols: l'1 i el 0. A cada nivell d'ordre, com a tots els sistemes posicionals, queda representada una potència de la base, en aquest cas 2. La característica especial del sistema binari és que cada potència la tenim o bé una sola vegada o bé cap. Per exemple, en notació decimal al nombre 423 tenim 4 centenes, múltiples vegades la potència  $10^2$ ; aquesta condició no es pot donar mai en base 2. En notació binària els 31 primers nombres s'escriuen així:

Base 10	Base 2	Base 10	Base 2	Base 10	Base 2	Base 10	Base 2
0	0	8	1000	16	10000	24	11000
1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111

Les taules de sumar i multiplicar són fàcils:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

<sup>29</sup> A l'antic Egipte es feia servir aquesta propietat per multiplicar i dividir quantitats.

De fet és més fàcil multiplicar i dividir en base 2 que en base 10. El mateix Leibniz va destacar com era de fàcil fer divisions "*perquè no cal mai provar ni endevinar, com és necessari fer en la divisió ordinària*".

Exemple de producte	Exemples de divisió	
<p>Multiplicar 13 (1101) per 6 (110)</p> <pre>       1101 — 13     x 110 — 6     -----       0000       1101       1101     -----      100110 — 78           </pre>	<p>Dividir 15 (1111) entre 3 (11)</p> <pre>       1111   11 —       11     101 — 5       ---       001       000       ---        11        11        ---         00           </pre>	<p>Dividir 30 (11110) entre 9 (1001)</p> <pre>       11110   1001 —       1001    11 — 3       ---       01100       1001       ---        0011 — 3           </pre>

## Bits, bytes, ASCII, ISO, UNICODE

En informàtica la unitat mínima d'informació es diu *bit* (abreviatura de l'anglès **bi-nary digit**). Un *bit* pot està ocupat per un 1 o un 0. Amb dos *bits* podem codificar 4 caràcters, amb tres *bits*, vuit... Per codificar totes les lletres, nombres, signes de puntuació de l'escriptura llatina amb 8 bits en tenim més que suficient: podem codificar 256 caràcters. Aquesta unitat de 8 bits es coneix com a *byte* (**binary term**).

El codi **ASCII** en feia servir només 7 *bits* i no es podien assignar valors a signes com les vocals accentuades, la **ç**, la **ñ** o molts altres caràcters que es fan servir a la majoria de llengües escrites en alfabet llatí (tant en majúscula com en minúscula). D'aquí que després es passés a l'**ISO-8859-I** que sí que feia servir un *byte*. Amb aquest *byte* podem escriure als nostres ordinadors sense teclats adaptats en llengües com el gallec, l'alemany, el gal·lès, finès, feroès...

```

!"#$%&'()*+,-./
0123456789:;<=>?
@ABCDEFGHIJKLMNO
PQRSTUVWXYZ[\]^_
`abcdefghijklmno
pqrstuvwxyz{|}~
  
```

Ascii

Per fer servir aquets codis acostumem a prémer la tecla **Alt** i una sèrie de tres nombres. Podem veure uns exemples que funcionen a la majoria d'ordinadors (segons els tipus de lletra utilitzada en aquell moment):

Alt +	126	198	208	231	230	221	200
	~	ã	ð	þ	µ		ℒ

Actualment l'estàndard en tendència a implantar-se (i que molts navegadors web ja fan servir) és l'Unicode, inicialment amb 16 bits (65536 caràcters) i ara amb una modalitat de 32 bits (més de 4000 milions de caràcters), que permet visionar (si el tipus de lletra està instal·lat a l'ordinador) pràcticament qualsevol llengua del món, fins i tot llengües desaparegudes com la cuneïforme. Els caràcters Unicode, per utilitzar-se en llenguatge de programació *html* acostumen a anar precedits del signe **&#**.

&#1049	&#12354	&#21494	&#33865	&#45307
Й	あ	叶	葉	냉

## Els sistemes octal i hexadecimal

El fet de que un *bite* tingui 8 *byts* fa que en el món de la programació s'utilitzi freqüentment la base *octal* (base 8), encara que es prefereix més el sistema *hexadecimal* (base 16). La base octal utilitza només 8 xifres (del 0 al 7) i l'hexadecimal en fa servir 16 xifres; les sis que falten les acostumem a representar amb lletres (0 al 9, A, B, C, D, E, F).

Base 10	Base 2	Base 8	Base 16	Base 10	Base 2	Base 8	Base 16
1	1	1	1	9	1001	11	9
2	10	2	2	10	1010	12	A
3	11	3	3	11	1011	13	B
4	100	4	4	12	1100	14	C
5	101	5	5	13	1101	15	D
6	110	6	6	14	1110	16	E
7	111	7	7	15	1111	17	F
8	1000	10	8	16	10000	20	G

Totes dues bases estan molt relacionades amb la binària ja que 8 i 16 són potències de dos:

$$8 = 2^3$$

$$16 = 2^4$$

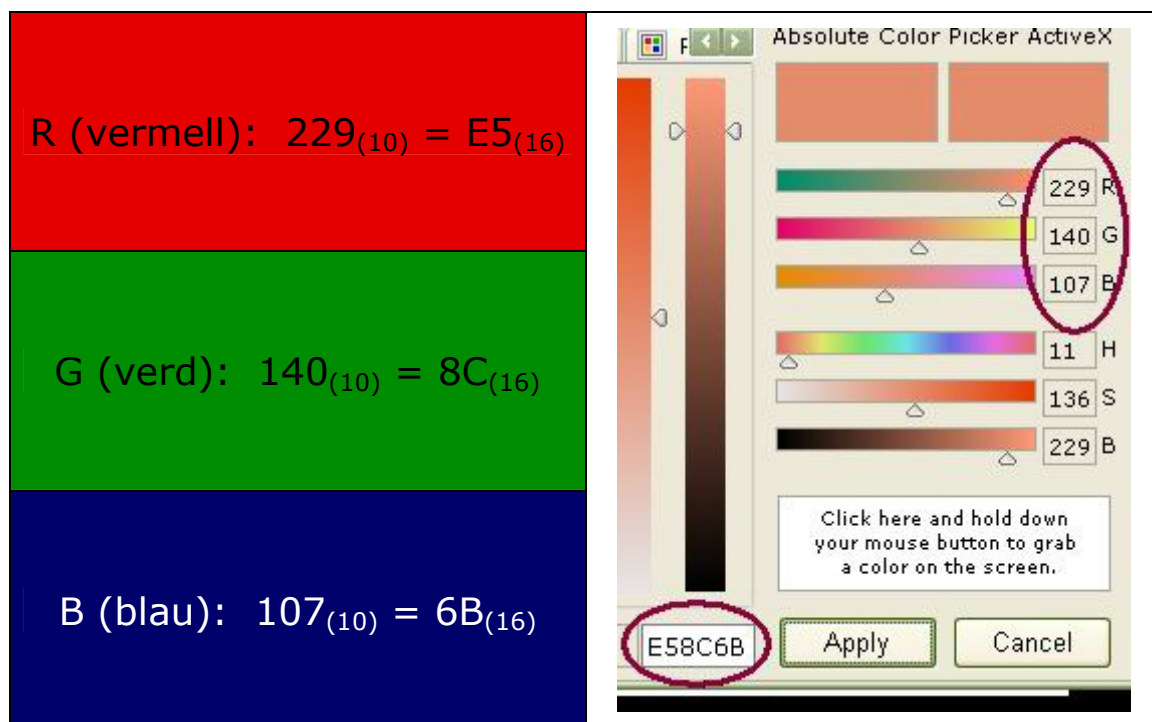
Això permet una ràpida transformació de nombres entre aquestes dues bases amb la base dos. En el cas de l'octal només ens cal separar les xifres binàries en grups de tres i fer la traducció corresponent:

Base 2	001 110	101 011	010 111 001	101 011 110
Base 8	1 6	5 3	2 7 1	5 3 6
Base 10	14	43	185	350

Per passar de la base dos a l'hexadecimal l'agrupament de xifres l'hem de fer de quatre en quatre:

Base 2	0001 1101	0111 0101	1100 1001 0011
Base 16	1 D	7 5	C 9 3
Base 10	29	117	3219

Un exemple en el que actualment es fa servir un codi hexadecimal és la forma de designació els colors als ordinadors. Acostumem a definir els colors de la pantalla amb tres valors corresponents al vermell, al verd i al blau (codi RGB *red-green-blue*). Aquests valors oscil·len entre el 0 i el 255 per a cada color. El 0:0:0 seria el negre i el 255:255:255 el blanc. D'aquesta manera aconseguim els "més de setze milions de colors" ( $256^3 = 16\,777\,216$ ) amb que ens acompanyaven la venda dels primers "ordinadors multimèdia per la llar". Un altre codi implantat actualment, i que s'usa intensament en el disseny de pàgines web, tradueix aquests valors a base hexadecimal. Un nombre entre 0 i 255 es pot escriure amb aquesta base amb només dues xifres. Per tant les nou xifres del sistema RGB es redueixen a sis. L'únic que acostumem a fer és posar un coixinet davant de les sis xifres. El negre serà #000000 i el blanc #FFFFFF.



També per designar els caràcters Unicode es fa servir el sistema hexadecimal. En aquest cas, en comptes de precedir el caràcter amb **&#**, es fa servir **&#x**.

&#1049	&#12354	&#21494	&#33865	&#45307
&#x3FB	&#x3042	&#x53F6	&#x8449	&#xB0FB
Й	あ	叶	葉	냉

## Tot digital, tot binari

La paraula *digital* s'ha incorporat al nostre vocabulari habitual com una forma de tecnologia que va molt més enllà del món informàtic: les emissions de ràdio i televisió, els GPS, els discs compactes... Una gran notícia de principis del 2007 ha estat la *digitalització* dels fons bibliotecaris de Catalunya. Però què vol dir *digitalitzar*? L'origen de la paraula ve de l'anglès *digit*: xifra (també un *dígit* en el nostre idioma és una xifra i la paraula deriva clarament del *dit* llatí: *dígitus*). Per tant digitalitzar és "posar en xifra". Aquesta expressió està molt lligada al món de la criptologia, per



tant hauríem de fer servir una de nova que podria ser un neologisme: **enumerar**, convertir en nombres. En el món de la comunicació un *senyal digital* és el que es presenta en valors discrets (alt-baix, per exemple) perfectament representables per uns i zeros. A l'ordinador aquests dígit, aquests uns i zeros, com hem vist abans, poden ser lletres, colors o sons. Tot amb només dos signes.